Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	09.05.2019
Abgabetermin:	16.05.2019

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ die dazugehörige Vervollständigung (vgl. Aufgabe 3 auf dem 4. Übungsblatt). Sei nun $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion die $\bar{\mathcal{F}}$-messbar ist. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, die $\mathcal{F}$-messbar ist, sodass $f = g$ $\bar{\mu}$-f.ü. gilt.

Aufgabe 2.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, für die die folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale existieren:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$
Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und dass
$$\int f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

b) Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eine (möglicherweise unbeschränkte) Funktion, sodass für jedes kompakte Intervall $I \subset (a, b)$ gilt, dass g auf I Riemann-integrierbar ist. Außerdem existiere das uneigentliche Riemann-Integral
$$\int_a^b g(x)dx.$$
Zeigen Sie, dass g auf (a, b) Lebesgue-integrierbar ist und dass
$$\int_{(a,b)} g d\lambda = \int_a^b g(x)dx.$$

c) Weisen Sie nach, dass das folgende uneigentliche Riemann-Integral existiert:
$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx.$$
Existiert es auch als Lebesgue-Integral?

Aufgabe 3. Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n})}{(1 + \frac{x}{n})^n}.$$
Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n d\lambda$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Version der Hölder-Ungleichung: Es seien $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\int |u_1 \cdot \ldots \cdot u_n| \, d\mu \leq N_{p_1}(u_1) \cdot \ldots \cdot N_{p_n}(u_n),$$

falls

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} = 1, \qquad p_i \in (1, \infty).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$, eine Folge von messbaren Mengen.

a) Durch Anwendung des Lemmas von Fatou zeige man:

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

b) Man beweise

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

falls μ endlich ist.

c) Man gebe ein Beispiel an, bei dem b) nicht gilt, wenn auf die Endlichkeit von μ verzichtet wird.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann gilt: $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

b) Es sei $f \in \mathcal{M}^+$, $f(\omega) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n \int \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu = \int f d\mu.$$

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.