Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	16.05.2019
Abgabetermin:	23.05.2019

6. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und $\mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\mu_i(A)$ für $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Maß definiert und dass

$$\int f\, d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \left(\int f\, d\mu_i \right),$$

für alle positiven messbaren Funktionen $f\colon \Omega \to [0, \infty)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für Indikatorfunktionen $f(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$ und Treppenfunktionen. Folgern Sie danach durch eine geeignete Approximation die Aussage für beliebige positive messbare Funktionen.

Aufgabe 2. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein allgemeiner Maßraum und $1 \le p \le r \le q$. Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_{L_r} \le \|u\|_{L_p}^{\lambda} \|u\|_{L_q}^{1-\lambda}, \quad u \in L_p \cap L_q$$

gilt mit

$$\lambda = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Folgern Sie daraus, dass $L_p \cap L_q \subset L_r$.

Aufgabe 3. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein allgemeiner Maßraum und $p \in (0, 1)$, f, g, $h > 0$ messbar und $p \in (0, 1)$ mit

$$q = \frac{1}{p-1}, \qquad \int f^p\, d\mu < \infty, \quad \int g^p\, d\mu < \infty, \quad \int h^q\, d\mu \in (0, \infty).$$

Man zeige

$$\int fh\, d\mu \ge \left(\int f^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int h^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

und

$$\left(\int (f+g)^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int f^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

⬆ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ und $f\colon (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

a) (Stetigkeitslemma)

   (i) $\omega \mapsto f(x,\omega)$ ist μ–integrierbar für festes $x \in (a,b)$;

   (ii) $x \mapsto f(x,\omega)$ ist stetig für festes $\omega \in \Omega$;

   (iii) Es existiert eine μ–integrierbare Funktion g, so dass $|f(x,\omega)| \leq g(\omega)$ für alle $(x,\omega) \in (a,b) \times \Omega$ gilt.

   Zeigen Sie, dass dann

$$x \mapsto F(x) := \int\limits_{\Omega} f(x,\omega)\, d\mu(\omega)$$

   stetig ist.

b) (Differenzierbarkeitslemma)

   (i) $\omega \mapsto f(x,\omega)$ ist μ–integrierbar für festes $x \in (a,b)$;

   (ii) $x \mapsto f(x,\omega)$ ist differenzierbar für festes $\omega \in \Omega$;

   (iii) Es existiert eine μ–integrierbare Funktion g, so dass $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,\omega)\right| \leq g(\omega)$ für alle $(x,\omega) \in (a,b) \times \Omega$ gilt.

   Zeigen Sie, dass dann F differenzierbar ist und es gilt

$$\frac{d}{dx} F(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x,\omega)\, d\mu(\omega).$$

⬆ **Aufgabe 5** (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ und sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, also insbesondere $g < \infty$ f.ü.

b) g ist auf jedem nichtleeren Intervall unbeschränkt und in jedem Punkt unstetig. Diese Eigenschaften gelten auch, wenn man g auf einer beliebigen Lebesgue-Nullmenge ändert.

c) Die Funktion g^2, gegeben durch $g^2(x) = (g(x))^2$, ist f.ü. endlich, aber auf keinem nichtleeren Intervall integrierbar.

⬆ **Aufgabe 6** (3 Punkte). Es sei X eine nicht–negative, integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} x\,(1 - F(x)) = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Lebesgue.

Abgabetermin: Die mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.