Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	22.05.2019
Abgabetermin:	29.05.2019 in der **Übung**

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Relation $<<$ auf der Menge der Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ reflexiv und transitiv ist. Die durch $\mu << \nu$ und $\nu << \mu$ definierte Relation $\mu \sim \nu$ ist dann eine Äquivalenzrelation. Zwei Maße μ und ν stehen genau dann in dieser Relation, wenn sie die gleichen Nullmengen besitzen.
Nun seien μ und ν σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu \sim \nu$. Zeigen Sie $\nu = f\mu$ und $\mu = g\nu$, wobei $0 < f < \infty$ fast überall und $g = \frac{1}{f}$ fast überall.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

Hinweis: Man berechne

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2}\, dy \right) dx$$

und wende den Satz von Tonelli an.

Aufgabe 3 (Hausdorff-Maß)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum, $p \geq 0$ und $\delta > 0$. Für $A \subset X$ definieren wir

$$H_{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty (\mathrm{diam} E_k)^p : \ A \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_k,\ \mathrm{diam} E_k \leq \delta \right\},$$

wobei $\mathrm{diam} E = \sup_{x,y \in E} d(x, y)$ für $E \subset X$ und $\inf \emptyset = \infty$. Dann setzen wir

$$H_p(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} H_{p,\delta}(A).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) H_p ist ein äußeres Maß.

b) Für jeweils zwei Mengen $A, B \subset X$ mit $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : \ a \in A, b \in B\} > 0$ gilt

$$H_p(A \cup B) = H_p(A) + H_p(B).$$

c) H_p ist ein Maß auf $(X, \mathcal{B}(X))$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Carathéodory und zeigen Sie, dass Borel-messbare Mengen auch H_p-messbar sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgenden Maße auf der reellen Achse: $\mu_1 = \delta_0$, $\mu_2 = \frac{1}{25}\lambda_{[0,25]}$ und $\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$, dabei bezeichne λ das Lebesgue-Maß und δ das Dirac-Maß. Für welche $i \neq j$ gilt $\mu_i << \mu_j$? Finden Sie die Radon-Nikodym-Ableitungen für jeden solchen Fall.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es seien μ, ν, λ Maße, für die die Radon-Nikodym Ableitungen $\frac{d\nu}{d\mu}$ und $\frac{d\mu}{d\lambda}$ existieren. Dann existiert auch $\frac{d\nu}{d\lambda}$. Zeigen Sie $\frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\lambda}$ λ-fast überall.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Maßräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, i=1,2 mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Weiterhin sei μ_1 das Lebesguemaß und μ_2 das Zählmaß.

a) Beweisen Sie, dass

$$D = \{(\omega, \omega) : \omega \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\int \mu_2(D_{\omega_1}) d\mu_1(\omega_1) \neq \int \mu_1(D_{\omega_2}) d\mu_2(\omega_2)$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum in der Vorlesung angegebenen Satz ?

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und wegen des Feiertags in der Übung am Mittwoch abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.