Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	30.05.2019
Abgabetermin:	06.06.2019

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge der $t \geq 0$ mit $\mu(\{f = t\}) \neq 0$ höchstens abzählbar ist.

Aufgabe 2. Seien μ, ν σ–endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Wir definieren

$$F(x) := \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((x,0]) & x < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad G(x) := \begin{cases} \nu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\nu((x,0]) & x < 0. \end{cases}$$

Außerdem seien $\Delta F(x) := F(x) - F(x-)$ und $\Delta G(x) := G(x) - G(x-)$.

a) Zeigen Sie F und G sind monoton steigend, rechtsstetig und $\Delta F(x) = 0$ genau dann, wenn $\mu(\{x\}) = 0$. Außerdem ist μ eindeutig durch F bestimmt und umgekehrt. Deshalb setzen wir $\int u \, \mathrm{d}F := \int u \, \mathrm{d}\mu$, für eine messbare Funktion u.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $B := \{(x,y) : a < x \leq b, x \leq y \leq b\}$. Zeigen Sie, dass B messbar ist und

$$\mu \times \nu(B) = \int_{(a,b]} F(s) \; \mathrm{d}G(s) - F(a)(G(b) - G(a)).$$

(Hinweis: Satz von Tonelli)

c) **(Partielle Integration:)** Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} & F(b)G(b) - F(a)G(a) \\ & \quad = \int_{(a,b]} F(s) \; \mathrm{d}G(s) + \int_{(a,b]} G(s-) \; \mathrm{d}F(s) \\ & \quad = \int_{(a,b]} F(s-) \; \mathrm{d}G(s) + \int_{(a,b]} G(s-) \; \mathrm{d}F(s) + \sum_{a<s\leq b} \Delta F(s) \Delta G(s). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy} - 2\mathrm{e}^{2xy}$$

nicht über der Menge $[1, +\infty) \times [0,1]$ λ^2–integrierbar ist. Dabei bezeichne λ^2 das zweidimensionale Lebesgue–Maß.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger reellwertiger Funktionen definiert auf $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} g_n := \{x \in \mathbb{R} \colon g_n(x) \neq 0\} \subset (n-1, n)$ (d.h. der Träger von g_n ist in $(n-1,n)$ enthalten) und $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Weisen Sie nach, dass die Funktionen

a)

$$f_1(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_1 \colon (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$$

b)

$$f_2(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, g_n(y), \quad f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

nicht den Satz von Fubini erfüllen.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von Mengen $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{F}$ von Ereignissen. Dann ist auch die Familie $(\delta(\mathcal{E}_i))_{i\in I}$ der erzeugten Dynkin-Systeme unabhängig.
<u>Anleitung:</u>

1. Warum kann I ohne Einschränkung als endlich vorausgesetzt werden?
2. Für $i_0 \in I$ definiere $\mathcal{D}_{i_0}$ als die Menge aller Ereignisse $E \in \mathcal{F}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ersetzt man in $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ die Menge $\mathcal{E}_{i_0}$ durch $\{E\}$, so ist die neu entstehende Familie unabhängig. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}_{i_0}$ ein Dynkin-System ist.
3. Zeigen Sie, dass die Familie, die sich ergibt, wenn man in $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ die Menge $\mathcal{E}_{i_0}$ durch $\mathcal{D}_{i_0}$ ersetzt, unabhängig ist.
4. Schließen Sie auf die Unabhängigkeit der Familie, die aus $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ dadurch entsteht, dass man $\mathcal{E}_{i_0}$ durch $\delta(\mathcal{E}_{i_0})$ ersetzt.
5. Folgern Sie aus Punkt 4 die Unabhängigkeit von $(\delta(\mathcal{E}_i))_{i\in I}$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.