Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	06.06.2019
Abgabetermin:	13.06.2019

9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, sodass

$$\int_{[0,1]\times[1,\infty)} g(x \cdot y) d\lambda^2(x, y) < \infty.$$

Aufgabe 2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Alle $A, B \in \mathcal{F}$ sind paarweise unabhängig.

(2) $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, ...$ genau dann unabhängig ist, wenn für alle $n \geq 2$ die σ-Algebren $\sigma\{X_n\}$ und $\sigma\{X_1, ..., X_{n-1}\}$ unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die Riemann'sche Zeta-Funktion ist definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s \in (1, \infty).$$

Auf $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}\right)$ seien Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_s$ gegeben, $s \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{P}_s(\{n\}) := \zeta(s)^{-1} n^{-s}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen und $p\mathbb{N} := \{pn : n \in \mathbb{N}\}$, $p \in \mathcal{P}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $(p\mathbb{N})_{p\in\mathcal{P}}$ unabhängig bezüglich $\mathbb{P}_s$ sind, für alle $s \in (1, \infty)$.

b) Beweisen Sie unter Verwendung von Teil (a) die Euler'sche Primzahlformel:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s \in (1, \infty)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es seien X und Y unabhängige und identisch geometrisch-verteilte Zufallsgrößen. Zeigen Sie, dass dann auch $U := (X + 1) \wedge (Y + 1)$ und $V := X - Y$ unabhängig sind.

Aufgabe 6 (3-dim. Polarkoordinaten) (4 Punkte).
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)d\lambda(x) = \int_D f(r\cos\theta\cos\omega, r\sin\theta\cos\omega, r\sin\omega)r^2\cos\omega\, d\lambda(r,\theta,\omega)$$

mit $D = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.