

# Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß  
Verena Köpp

Ausgabetermin:	13.06.2019
Abgabetermin:	20.06.2019

## 10. Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ . Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

gilt.

**Aufgabe 2.** Eine  $\Gamma(p, b)$ -verteilte Zufallsvariable besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

für  $p, b > 0$ .

Nun seien  $X_1 \sim \Gamma(p_1, b)$  und  $X_2 \sim \Gamma(p_2, b)$  unabhängige gammaverteilte Zufallsvariablen mit  $p_1, p_2, b > 0$ . Bestimmen Sie die Verteilung von  $X_1 + X_2$ .

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie folgende Aussagen für Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  und  $\nu$  auf  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ .

a)  $\widehat{\mu + \nu} = \widehat{\mu} + \widehat{\nu}$ ,

b)  $\widehat{\alpha\mu} = \alpha\widehat{\mu}$  für  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,

c)  $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu}$ .

d) Sei  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  linear. Dann ist  $\widehat{T\mu} = \widehat{\mu} \circ T^t$ , wobei  $T^t$  die zu  $T$  transponierte Abbildung bezeichnet.

e) Sei  $T_a$  eine Translation in  $\mathbb{R}^d$ , also  $T_a(x) = x + a$  für ein festes  $a \in \mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\widehat{T_a(\mu)} = \widehat{\delta_a} \cdot \widehat{\mu}$ , wobei  $\widehat{\delta_a}$  das Dirac-Maß im Punkt  $a$  bezeichnet.

■ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Finden Sie die Dichte von  $Z := X + Y$ , falls  $(X, Y)$  die Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$$

besitzt.

- ♣ **Aufgabe 5** (4 Punkte). Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Exponentialverteilung mit einem Parameter  $\lambda > 0$ .
- ♣ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Es sei  $\widehat{\mathbb{P}}$  die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen  $X$ . Zeige, dass  $\overline{\widehat{\mathbb{P}}}$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}^2$  und  $\operatorname{Re}(\widehat{\mathbb{P}})$  charakteristische Funktionen sind, dass aber  $|\widehat{\mathbb{P}}|$  im Allgemeinen keine charakteristische Funktion ist.

**Abgabetermin:** Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.

**Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur:** 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.