Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	20.06.2019
Abgabetermin:	27.06.2019

11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ ein normalverteilter d-dimensionaler Zufallsvektor.

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion für X.

b) Sei nun $\mu = 0$. Berechnen Sie mithilfe von Teil a) $\mathbb{E}(X_j X_k)$ sowie $\mathbb{E}(X_j X_k^2)$ für $j, k \in \{1, \dots, d\}$.

Aufgabe 2. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid-Folge gleichmäßiger Verteilungen auf $M = \{0, 1, \dots, 9\}$. Berechnen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Verteilung von

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} X_n.$$

Aufgabe 3. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_1, X_2, \dots$ reellwertige Zufallsvariablen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n - X)^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $X_n \to X \quad \mathbb{P}-f.s.$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$.

a) Es sei $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Zeigen Sie, dass dann $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n}(A) \le \mathbb{P}_X(A)$ für alle abgeschlossenen Mengen A.

b) Es gelte $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} X_n = x \in \mathbb{R}$ (Konvergenz in Verteilung gegen einen konstanten Grenzwert). Zeigen Sie, dass dann gilt $\mathbb{P}\lim_{n\to\infty} X_n = x$.

c) Es gelte $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} X_n = X$ und $\mathbb{P}\lim_{n\to\infty} Y_n = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} X_n Y_n = cX$.

☗ **Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Seien $X_n \sim \Gamma(\alpha_n, \lambda)$ für $n \in \mathbb{N}$ gammaverteilte Zufallsvariablen für $\lambda > 0$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha_n \to \infty$. Zeigen Sie, dass $\frac{\lambda X_n - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$ für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable konvergiert.

☗ **Aufgabe 6** (2 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge normalverteilter Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X konvergiert. Zeigen Sie, dass diese Zufallsvariable X normalverteilt oder konstant f.s. ist.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.