Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	27.06.2019
Abgabetermin:	04.07.2019

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,2], \mathcal{B}([0,2]), 1/2 \cdot \lambda)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}([0,2])$ bezeichne. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ für

a) $\xi(x) = x^2 + 1, \qquad \eta(x) = \begin{cases} -2 & : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & : x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 3 & : x \in (1, 2] \end{cases}$

b) (2 Punkte)

$$\xi(x) = 2x^2, \qquad \eta(x) = \begin{cases} 2 & : x \in [0,1) \\ x & : x \in [1,2] \end{cases}$$

Aufgabe 2. Für $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ setze $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY)$. Dann ist $\left(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ ein Hilbertraum. Seien $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine Zufallsvariable und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ die Orthogonalprojektion von X auf den Teilraum $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist, d.h. es gilt

$$\|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \inf \left\{ \|X - Y\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} : Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \right\}.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung von der Menge Ω in den messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann ist f bezüglich der σ-Algebra $T^{-1}(\mathcal{A}')$ messbar genau dann, wenn es eine $\mathcal{A}'$-messbare Funktion $g : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $f = g \circ T$.

Aufgabe 4. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine Zufallsvariable und $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ Sub-σ–Algebren von $\mathcal{F}$.
Weisen Sie folgende in der Vorlesung angegebene Eigenschaften nach:

a) Jensen'sche Ungleichung: Es sei f eine konvexe Funktion und $\mathbb{E}\,|f(X)| < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[X]).$$

b) (2 Punkte)
Turmregel: Falls $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, so gilt

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[\mathbb{E}_{\mathcal{H}}[X]] = \mathbb{E}_{\mathcal{H}}[\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[X]] = \mathbb{E}_{\mathcal{H}}[X].$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine symmetrische Irrfahrt, d.h.

$$X_n = \eta_1 + ... + \eta_n,$$

wobei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen ist mit

$$\mathbb{P}(\eta_n = 1) = \mathbb{P}(\eta_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Es bezeichne $\mathcal{F}_n$ die von $\eta_1, ..., \eta_n$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie für

a) $Y_n := X_n^2 - n$ und

b) $Y_n := (-1)^n \cos(\pi X_n)$,

dass Y_n ein Martingal ist, d.h. Y_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n$-messbar und integrierbar es gilt

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Y_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda))$. Weiterhin sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ das Mengensystem, für dessen Elemente gilt

$$G = 1 - G := \{1 - x : x \in G\}$$

a) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{G}$ eine σ–Algebra ist.

b) Beschreiben Sie alle Zufallsvariablen, die bezüglich $\mathcal{G}$ messbar sind.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.