B. Schmalfuß Jena, den 24.09.13

Prüfungsklausur Stochastik II

2. Klausur / 1. Wiederholungsklausur

Allgemeine Hinweise:

- Zur Verfügung stehende Zeit: 90 min.
- Hilfsmittel: keine.
- Das Benutzen von nicht erlaubten Hilfsmitteln bzw. der Informationsaustausch mit anderen Studierenden wird mit der sofortigen Abnahme der Klausur und mit der Note 5.0 bestraft!
- Die Rechnungen sind in lesbarer Schrift unter den Aufgabenstellungen bzw. auf der Rückseite auszuführen. Alle zur Lösung der Aufgabe notwendigen Rechenschritte müssen aufgeschrieben werden. Die farbigen Blätter sind für Nebenrechnungen, die weder bepunktet noch angesehen werden. Die Blätter müssen zusammengeheftet bleiben.

Vor- und Nachname des Studierenden (Blockschrift):

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufg.	1(8)	2(8)	3(8)	4(5)	5(3)	Σ(32)
Punkte						

Note:

Prüfer: Datum:

Aufgabe 1 (6+2 Punkte)

(a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Weiterhin sei $\mathcal{G}$ die Teilmenge von $\mathcal{A}$, für deren Elemente gilt:

$$G = 1 - G = \{1 - g : g \in G\}.$$

Weisen Sie nach, dass $\mathcal{G}$ eine σ–Algebra ist. Zeigen Sie außerdem, dass für $X \in L_1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $X \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}} X(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1-\omega)}{2}.$$

(b) Es sei $X = (X(i))_{i \in \mathbb{N}}$ ein Martingal. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X(i) = \mathbb{E}X(1)$ gilt für $i = 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, falls für ein $a > 1$ gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a^n \mu(\{a^n < f \leq a^{n+1}\}) < \infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geq 0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} n \int \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)

(a) Eine $Erl(\lambda, n)$-verteilte Zufallsvariable besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ (Erlang-Verteilung).
Nun seien $X_1 \sim Erl(\lambda, n)$ und $X_2 \sim Erl(\lambda, m)$ unabhängige Erlang-verteilte Zufallsvariablen mit $\lambda > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.
Hinweis: Für die *Gammafunktion*

$$\Gamma(s) := \alpha^s \int_0^\infty x^{s-1} e^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x,$$

mit $\alpha = b + ic$, $b, c \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ gilt $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ und $\Gamma(1) = 1$.

(b) Definieren Sie die Begriffe *schwache Konvergenz* ($\mathrm{w}-\lim$) für (Wahrscheinlichkeits)maße und *Konvergenz in Verteilung* ($\mathcal{L} - \lim$) und formulieren Sie den Stetigkeitssatz von Lévy.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung von

$$\varphi(t) = e^{-t^4}$$

und schlussfolgern Sie daraus, dass φ nicht die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}$ das Mengensystem über Ω mit

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Weisen Sie nach, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra aber keine σ–Algebra ist.