

Übungsaufgaben zur VL EWMS, Sommersemester 2019

Blatt 1, Abgabe: 17.04.2019, 12 Uhr

1. (2 Punkte)

Durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten nehme man Stellung zu folgendem Argument:

Beim dreimaligen Würfeln sind die Ergebnisse „die Augensumme ist 11“ und „die Augensumme ist 12“ gleichwahrscheinlich, da beide Summen auf jeweils sechs Arten dargestellt werden können. ($11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$; $12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 6 + 3 + 3 = 5 + 5 + 2 = 5 + 4 + 3 = 4 + 4 + 4$.)

2. (2+1 Punkte)

Die folgende Aufgabenstellung ist einer Problemstellung aus dem zweiten Weltkrieg nachempfunden, als aus den Seriennummern erbeuteter Waffen die Gesamtproduktion geschätzt werden sollte:

In einer Urne befinden sich N von 1 bis N nummerierte Kugeln und es werden n Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.

- (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die größte gezogene Zahl gleich k ist? (Wählen Sie eine Menge Ω der möglichen Versuchsausgänge so, dass alle diese Versuchsausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Stellen Sie danach das interessierende Ereignis „die größte gezogene Zahl ist gleich k “ als Teilmenge von Ω dar.)
- (ii) Für welchen Wert von N wird die obige Wahrscheinlichkeit maximal?

3. (2 Punkte)

Betrachten Sie eine Folge von Urnenmodellen des Typs I (jeweils n -faches Ziehen **ohne** Zurücklegen), wobei im N -ten Modell die Anzahl der schwarzen Kugeln s_N und die Anzahl der weißen Kugeln w_N sei ($s_N + w_N = N$). Es gelte $s_N/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p \in (0, 1)$. Wogegen konvergieren die Wahrscheinlichkeiten, dass genau k schwarze Kugeln gezogen werden, falls $N \rightarrow \infty$?

4. (1+1+1 Punkte)

Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in einer nichtleeren Menge Ω . Beweisen Sie:

- (i) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$,
- (iii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Hinweis: Die Definition einer σ -Algebra erfolgt ggf. erst in der Vorlesung am 15.4.2019.