Übungsaufgaben zur VL EWMS, Sommersemester 2019

Blatt 3, Abgabe: 15.05.2019, 12 Uhr

9. (2 Punkte)

   $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein W-Raum und es sei $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$ gegeben.

   Zeigen Sie, dass $P(\cdot \mid B)$ mit $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)\ \forall A \in \mathcal{A}$ ein W-Maß auf $\mathcal{A}$ ist!

10. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seien unabhängige Ereignisse.

    Zeigen Sie, dass $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ gilt!

11. (3 Punkte)

    In der Zahlentheorie bezeichnet man als *Eulersche φ-Funktion* die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$, falls $n \geq 2$.

    Zeigen Sie: Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n in paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ und Potenzen $k_i \in \mathbb{N}$, so gilt:

    $$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) .$$

    Hinweis: Betrachten Sie den W-Raum $(\Omega_n, 2^{\Omega_n}, P_n)$, wobei $P_n(\{k\}) = 1/n\ \forall k \in \Omega_n$. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_1 := \{p_1, 2p_1, \ldots, n\}, \ldots, A_m := \{p_m, 2p_m, \ldots, n\}$ stochastisch unabhängig sind und nutzen Sie die Beziehung
    $B := \{k \in \Omega_n\colon k \text{ ist zu } n \text{ teilerfremd}\} = A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c$.

12. (2 Punkte)

    Ω sei eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung.

    Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_X = \{B \subseteq \mathbb{R}\colon X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$ ist!

13. (1+1 Punkte)

    Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Zufallsvariable X mit folgenden Verteilungen:

    (i) X sei binomialverteilt mit Parametern n und p, d.h.,

    $$P^X(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

    wobei $p \in [0,1]$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$,

    (ii) X sei poissonverteilt mit Parameter λ, d.h., $P^X(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, wobei $\lambda \geq 0$ und $k \in \{0, 1, \ldots\}$!