

Übungsaufgaben zur VL EWMS, Sommersemester 2019

Blatt 4, Abgabe: **27.05.2019** – Montag!, 10 Uhr

14. (2+2 Punkte)

- (i) X sei eine diskrete Zufallsvariable auf einem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in \mathbb{N} . Zeigen Sie, dass

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega: X(\omega) \geq n\})$$

gilt!

- (ii) Es werden unabhängige Zufallsexperimente bis zum Erreichen des ersten Erfolges durchgeführt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt jeweils $p \in (0, 1)$. Die Zufallsvariable X nimmt den Wert k an, falls der erste Erfolg im k -ten Versuch eintritt.

Bestimmen Sie $P(X = k)$ und den Erwartungswert von X !

15. (2 Punkte)

Gegeben seien Zufallsvariable X und Y mit $P(\{\omega: X(\omega) = Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega: X(\omega) = -Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega: X(\omega) = Y(\omega) = 0\}) = 1/3$

Zeigen Sie, dass X und Y unkorreliert (Korrelation Null), aber nicht unabhängig sind!

16. (2 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ seien stochastisch unabhängig. ($P(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \lambda_i^k / k!$ für $k = 0, 1, 2, \dots$)

Zeigen Sie, dass

$$X_1 + X_2 = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

gilt!

17. (2 Punkte)

Wir betrachten ein mit Gas gefülltes Gefäß. Es beinhaltet $n = 0,25 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Die Bewegung der Gasmoleküle ist irregulär. Daher wird jedes Gasmolekül mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ in der linken bzw. rechten Hälfte sein, unabhängig von den anderen Molekülen.

Treffen Sie eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Anteil der Moleküle in der linken Hälfte größer als $(1 + 10^{-8})/2$ ist!

Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung. (Vorlesung am 23.05.)