Übungsaufgaben zur VL EWMS, Sommersemester 2019

Blatt 6, Abgabe: 26.06.2019, 12 Uhr

21. (2 Punkte)

    X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$.
    Berechnen Sie die Dichte von $X_1 + X_2$!

22. (3+2 Punkte)

    $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

    (i) Zeigen Sie, dass $X_1 + \cdots + X_k$ eine Dichte p mit

    $$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}\lambda^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

    hat!

    (ii) Weiter sei $Z_t = \max\{n \geq 0: \ X_1 + \cdots + X_n \leq t\}$.
    Zeigen Sie, dass $Z_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ gilt!
    Hinweis: Nutzen Sie, dass $P(Z_t = k) = P(X_1 + \cdots + X_k \leq t) - P(X_1 + \cdots + X_{k+1} \leq t)$ gilt!

23. (1+2 Punkte)

    Es seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $Y = e^X$.

    (i) Stellen Sie die Verteilungsfunktion F_Y durch die Verteilungsfunktion F_X von X dar!

    (ii) Besitzt Y eine Dichte? Begründen Sie Ihre Aussage und berechnen Sie gegebenenfalls die Dichte von Y!