Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	04.11.2019
Abgabetermin:	11.11.2019

3. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es seien A und B Ereignisse. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A und B sind unabhängig.

(ii) A^c und B sind unabhängig.

(iii) A^c und B^c sind unabhängig.

b) Sie werfen einen weißen und einen schwarzen Würfel. Betrachten Sie folgende drei Ereignisse

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{Der weiße Würfel zeigt 5 oder 6}\}\,, \\ A_2 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 3 teilbar}\}\,, \\ A_3 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 4 teilbar}\}\,. \end{aligned}$$

Sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 vollständig unabhängig?

Aufgabe 2.

a) Eine Versicherung hat ermittelt, dass bei Verkehrsunfällen von Autofahrern, die angegurtet waren, nur 8 Prozent Kopfverletzungen erlitten haben. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62 Prozent keine Kopfverletzungen davon. Es kann davon ausgegangen werden, dass 15 Prozent aller Autofahrer keinen Gurt anlegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach einem Unfall mit Kopfverletzung eingelieferter Autofahrer keinen Gurt trug?

b) Zwei Medikamente A, B werden in den Städten 1, 2 getestet. In Stadt 1 werden von 16 Patienten, die A nehmen, 4 gesund und von 40, die B nehmen, werden 11 gesund. In Stadt 2 ist das Verhältnis 29/40 für A beziehungsweise 12/16 für B. Man weise nach, dass in beiden Städten B erfolgreicher ist als A (d.h. die Behandlung mit B führt wahrscheinlicher zur Heilung als die Behandlung mit A), aber falls die Städte zusammengefasst werden, A erfolgreicher ist. Man beschreibe dieses Paradoxon mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 3. *Das Paradoxon von Chevalier de Méré.*
De Méré überlegte sich, dass es beim Wurf mit drei nicht unterscheidbaren fairen Würfeln genau sechs Möglichkeiten gibt, die Augensumme 11 bzw. 12 zu erzielen. Hieraus folgerte er, beide Ereignisse hätten die gleiche Wahrscheinlichkeit, fand dies aber in der Praxis nicht bestätigt. Worin bestand sein Trugschluss? Geben Sie für das obige Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30% und von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% Ausschuss.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein der Gesamtproduktion zufällig entnommenes Teil Ausschuss?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gefundenes Ausschussteil auf der zweiten Maschine gefertigt wurde?

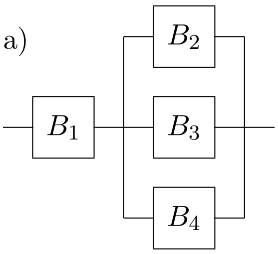
c) Um die Qualität zu verbessern, soll die erste Maschine gegen eine neue ausgetauscht werden. Welche Ausschussquote darf die neue Maschine höchstens haben, damit die Gesamtausschusswahrscheinlichkeit (siehe a)) 2,5% nicht übersteigt?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$, und $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie

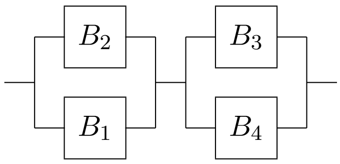
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k})\right].$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** In einem Stromkreis befinden sich bis zu 8 Bauteile $B_i, i = 1 \ldots 8$, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ ausfallen. Bestimmen Sie die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten der unten angegebenen Schaltungen.

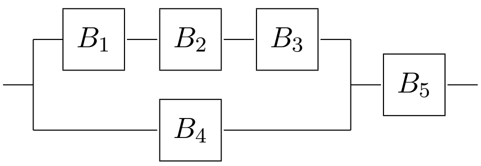
a)



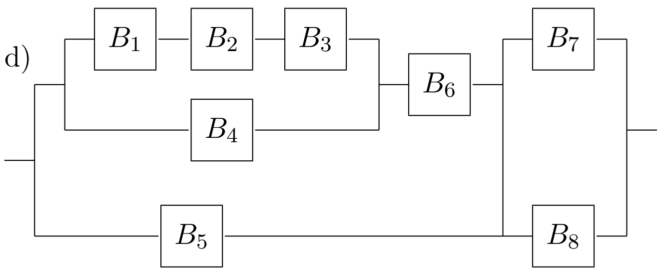
b)



c)



d)



Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.