

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020

FSU Jena

Prof. Schmalfuß

Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	11.11.2019
Abgabetermin:	18.11.2019

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Trisomie 21 kann durch eine Fruchtwasser-Untersuchung pränatal festgestellt werden. Das Untersuchungsergebnis ist in 99% aller Fälle, in denen Trisomie 21 vorliegt, positiv. Ebenso ist der Befund in 99% der Fälle, in denen der Fötus nicht vom Down-Syndrom betroffen ist, richtigerweise negativ. In der Altersklasse der 25-jährigen Mütter ist einer von 1250 Föten vom Syndrom betroffen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiven Befund tatsächlich das Down-Syndrom vorliegt sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fötus trotz negativem Ergebnis vom Down-Syndrom betroffen ist.

Aufgabe 2. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 3 \\ \frac{a^2(x-3)}{x-b}, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, sodass F eine Verteilungsfunktion darstellt.

Aufgabe 3. Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit bekannten Verteilungsfunktionen F_{X_1} beziehungsweise F_{X_2} . Leiten Sie mit Hilfe dieser Verteilungsfunktionen eine allgemeine Formel für die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$Y := \min(X_1, X_2) \text{ und } Z := \max(X_1, X_2)$$

her!

📌 **Aufgabe 4** (3 Punkte). Die Anzahl der Tippfehler pro Seite in einem Buch mit 300 Seiten ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Seite mindestens 5 Tippfehler enthält.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 Seiten jeweils mindestens 2 Tippfehler enthalten?

Hinweis: Die Anzahl der Tippfehler auf einer Seite ist unabhängig von der Zahl der Tippfehler auf den anderen Seiten.

■ **Aufgabe 5** (5 Punkte). Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

und $Y := X^2$. Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$,
- $\mathbb{P}(1 \leq X < 2)$,
- $\mathbb{P}(X \leq 2Y)$,
- $\mathbb{P}(X + Y \leq \frac{3}{4})$,
- die Verteilungsfunktion F_Z von $Z := \sqrt{X}$.

■ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Welche Verteilung ist sinnvollerweise zu verwenden und wie sollten die entsprechenden Parameter gewählt werden?

Hinweis: Es ist nicht nötig die Aufgaben komplett zu lösen. Geben Sie stattdessen eine geeignete Verteilung und gegebenenfalls die zugehörigen Parameter an.

- Die Durchführung eines bestimmten Versuchs dauert eine Stunde. Dabei tritt ein erwünschter Effekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% auf. Welche Zeit ist zu veranschlagen, um den Effekt mit einer Sicherheit von 98% mindestens einmal zu beobachten?
- Ein Bäcker hat 100 frische Brote und 20 altbackene, die er 'auf gut Glück' darunter mischt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde, der drei Brote kauft, wenigstens ein altbackenes erhält.
- Ein Arbeiter bedient 16 Maschinen zugleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Maschinen in einem bestimmten Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordert, sei 25%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 Maschinen in diesem Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordern?
- Um zu entscheiden, ob eine Warenlieferung angenommen werden soll, wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ entnommen. Enthält die Stichprobe kein fehlerhaftes Teil, so wird die Lieferung angenommen, enthält sie mehr als ein Ausschussstück, wird die Lieferung zurückgewiesen. Enthält sie hingegen genau ein Ausschussteil, so wird eine weitere Stichprobe genommen und die Warenlieferung abgewiesen, falls diese zweite Stichprobe nicht ausschussfrei ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung, wenn ihr Ausschussanteil 1% beträgt?

Abgabetermin: Die mit ■ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.