Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	18.11.2019
Abgabetermin:	25.11.2019

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, für $k \geq 1$. Beweisen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(X = k + n | X > n) = \mathbb{P}(X = k).$$

Aufgabe 2. Beim Bogenschießen auf eine Zielscheibe ermitteln Sie für sich eine Wahrscheinlichkeit von 1/9 für das Ereignis, ins Schwarze zu treffen.

a) Wie viele Versuche benötigen Sie, um mit einer Wahrscheinlichkeit größer gleich 0,99 wenigstens einen Volltreffer zu erzielen? Nehmen Sie an, dass die verschiedenen Versuche stochastisch unabhängig voneinander sind.

b) Sie hatten Pech und haben mit der in a) ermittelten Anzahl an Versuchen nicht ins Schwarze getroffen. Ermitteln Sie die Anzahl der weiteren Versuchen, mit der Sie rechnen müssen, um mit Wahrscheinlichkeit größer gleich 0,99 wenigstens einen Volltreffer zu erzielen.

Aufgabe 3.

a) Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 3]$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion von $Y = X^2$.

b) Ein Hersteller von Taschenrechnern gibt eine Garantie von 5 Jahren. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Lebensdauer der produzierten Taschenrechner exponentialverteilt zum Parameter 1/10 ist (Zeiteinheit: 1 Jahr). Ein Kunde hat vor 2 Jahren gleichzeitig zwei Taschenrechner gekauft, die bislang noch beide funktionieren. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden Taschenrechner innerhalb der verbleibenden Garantielaufzeit vom Hersteller ersetzt werden muss?
(Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Lebensdauern der beiden Taschenrechner unabhängig sind.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} c\,|x|e^{-x}, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $c \in \mathbb{R}$, sodass f eine Dichtefunktion für eine Zufallsvariable X ist.

b) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.

c) Ermitteln Sie $\mathbb{P}(0,5 \leq X \leq 1)$ und $\mathbb{P}(X = 0,5)$.

d) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$, sodass gilt $\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

a) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zu dem Parameter $\lambda > 0$.
Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := \log(X)$.

b) Sei $a > 0$ fix. Gegeben sei eine auf $[0, a]$ gleichverteilte Zufallsvariable K. Berechnen Sie die Dichtefunktion für das zufällige Volumen eines Würfels mit Kantenlänge K.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Für welche Werte der Parameter c_i, $i = 1, 2, 3$, sind die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten?

a) $f(x) = c_1(1 + x^2)^{-1}, \ x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = c_2 \left[2x(1 - x)\right]^{-\frac{1}{2}}, \ 0 < x < 1$.

c) $f(x) = c_3 \exp(-x + \ln(x)), \ x \geq 0$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.