Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	02.11.2019
Abgabetermin:	09.12.2019

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}_+$ und Dichte f_X sowie Verteilungsfunktion F_X. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\, dx.$$

b) Für $\lambda > 0$ sei eine Zufallsvariable X gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} & \text{, für } x > 0, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Sei $S \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion m_S und mit dieser das erste und zweite Moment von S.

Aufgabe 2. Eine Maschine füllt Mehl in Säcke ab. Wir nehmen an, dass das Füllgewicht normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 1000\,g$ und $\sigma = 5\,g$. Bestimmen Sie das 10% Quantil für das Füllgewicht und interpretieren Sie diesen Wert.

Aufgabe 3. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.
Hinweis: Für $k \geq 1$ und $q \geq 0$ gilt

$$\frac{q^k}{k} = \int_0^q x^{k-1} dx.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

a) Sei $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion m_Z und mit dieser das erste und zweite Moment von Z.

b) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X \geq k\right).$$

☗ **Aufgabe 5** (5 Punkte)**.** Es sei $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von

a) $Y_1 = e^{-X}$,

b) $Y_2 = -3X + 4$,

c) $Y_3 = \lfloor X \rfloor + 1$.

Hinweis: Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$.

☗ **Aufgabe 6** (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie für $q = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ die Quantile z_q für die Verteilung mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.