Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	09.12.2019
Abgabetermin:	16.12.2019

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Gegeben sei eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U. Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie eine Funktion $H\colon [0,1] \to \mathbb{Z}$, sodass $H(U) \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Aufgabe 2. In einem Krankenhaus werden n Babys in einer bestimmten Woche geboren. Es soll davon ausgegangen werden, dass sich darunter keine Mehrlingsgeburten befinden, die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens oder eines Junges jeweils $\frac{1}{2}$ ist und dass diese Ereignisse unabhängig voneinander sind. Mit b_n soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden, dass mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind.

a) Berechnen Sie b_{10}.

b) Beweisen Sie mittels der Tschebyshevschen Ungleichung, dass $b_{100} < b_{10}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe 3. Sei X *Cauchy*–verteilt mit Parametern 1 und 0, d.h. X hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass X keinen Erwartungswert besitzt.

b) Finden Sie eine Funktion $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $G(U)$ Cauchy–verteilt ist für eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei eine Dichte gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

wobei $\alpha, \beta > 0$.

a) Berechnen Sie die dazugehörige Verteilungsfunktion.

b) Gegeben sei eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U. Bestimmen Sie eine Funktion $G :$ $[0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $G(U)$ die Dichte f besitzt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein mit Gas gefülltes Gefäß, welches $n = 25 \cdot 10^{21}$ Moleküle beinhaltet. Die Bewegung der Gas-Moleküle ist zufällig. Daher wird jedes Gas-Molekül mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ in der linken bzw. rechten Hälfte sein, unabhängig von den anderen Molekülen. Schätzen Sie mittels der Tschebyshevschen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, dass der Anteil der Moleküle in der linken Hälfte um $\frac{10^{-10}}{2}$ größer ist als in der rechten Hälfte.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable

$$Y = \frac{X}{2}(1 - (-1)^X)$$

und deren Erwartungswert $\mathbb{E}Y$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.