Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	16.12.2019
Abgabetermin:	06.01.2020

9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Ein Angestellter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro kurz nach Dienstschluss. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit lässt sich mit einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben. Die Zufallsvariablen seien als unabhängig vorausgesetzt. Berechnen Sie mit dem zentralen Grenzwertsatz die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angestellte dadurch in einem Jahr insgesamt mehr als 15 Überstunden arbeitet.

Aufgabe 2. Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch eine Zufallsvariable X mit unbekanntem Erwartungswert und Varianz $V(X) = 0.01$ angemessen beschrieben werden kann. Wie viele getrennte Messungen n (ohne gegenseitige Beeinflussung der Ergebnisse) müssen durchgeführt werden, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 der Betrag der Differenz zwischen dem empirischen Mittel der Messwerte und dem Erwartungswert kleiner als 0.02 ist? Nutzen Sie dabei

a) die Tschebychev-Ungleichung und

b) den zentralen Grenzwertsatz.

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Aufgabe 3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \text{ und } \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \varepsilon\right) \to 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ und für } n \to \infty.$$

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)**.** Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.4$ um eine Einheit in die negative Richtung. X_n gebe die Position des Grashüpfers nach n Sprüngen an.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_n.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Tier nach 10000 Sprüngen im Intervall $[7700, 8090]$?

Aufgabe 5 (4 Zusatzpunkte)**.** Betrachtet man die Binomialverteilung mit den Parametern n und p, so kann - wie in der Vorlesung gezeigt - für *großes* n und *kleines* p die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden, d.h.

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Hierbei ist $\lambda = np$. Eine Solarzelle in einem Solarmodul genüge mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0002 nicht der Qualitätskontrolle. Benutzen Sie obige Approximation, um die Wahrscheinlichkeit, dass

a) höchstens zwei von 5000,

b) genau eins von 1000,

c) keines von 100

dieser Solarzellen bei einer Kontrolle beanstandet werden, approximativ und berechnen Sie falls möglich die Ergebnisse exakt.

Aufgabe 6 (2 Zusatzpunkte)**.** Der Weihnachtsmann beliefert eine Stadt mit 10000 Kindern mit Geschenken. Dabei bekommen unartige Kinder kein Geschenk und artige Kinder bekommen sicher ein Geschenk. Wenn ein Kind artig war und dann dem Weihnachtsmann noch ein Gedicht aufsagen kann, bekommt es sogar insgesamt zwei Geschenke. Wir gehen davon aus, dass jedes Kind unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,75$ artig ist und dass der Weihnachtsmann immer erst dann eine Entscheidung über die Artigkeit trifft, wenn er vor dem Kind steht. Außerdem beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind ein Gedicht aufsagen kann $2/3$ (unabhängig davon, ob das Kind artig war).

a) Weil der Weihnachtsmann seinen Schlitten nicht überladen möchte, packt er für diese Stadt 12600 Geschenke ein. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschenke ausreichen?

b) Wie viele Geschenke sollte der Weihnachtsmann mitnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschenke ausreichen, $0,995$ beträgt?

Wir wünschen allen Studierenden erholsame Weihnachten
und einen guten Rutsch ins Jahr 2020!

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.