Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	06.01.2020
Abgabetermin:	13.01.2020

10. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei ein zufälliger Vektor (X, Y) mit der folgenden gemeinsamen Verteilung gegeben:

$X \setminus Y$	-1	0	2
-2	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$
3	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$

Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y, $\mathbb{E}Y$ und $\mathbb{E}(XY)$ sowie die Varianz von Y.

Aufgabe 2.

a) Die Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig und jeweils gleichverteilt auf $[-1, 1]$. Bestimmen Sie die Dichte der Summe $Z = X + Y$. Skizzieren Sie diese.

b) Seien X, Y unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichtefunktionen f_X, f_Y. Zeigen Sie, dass $X - Y$ die folgende Dichtefunktion besitzt

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z + x) f_Y(x)\, dx.$$

Aufgabe 3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig in einen Kreis gezeichnete Sehne länger als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, wenn man

a) die Endpunkte der Sehne zufällig gleichverteilt auf den Kreisbogen legt?

b) den Mittelpunkt der Sehne zufällig gleichverteilt in das Kreisinnere legt?

c) den Mittelpunkt der Sehne zufällig gleichverteilt auf den Kreisdurchmesser legt?

Was fällt Ihnen dabei auf? Begründen Sie dies.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Der zufällige Vektor (X, Y) besitze folgende Verteilung:

$X \setminus Y$	-1	2	4	
-1				0.4
0		0.03		
1	0.06			
		0.3		

a) Man ergänze in der Tabelle die Werte der Verteilung von (X, Y) bzw. der Randverteilungen von X und Y unter der Annahme, dass X und Y unabhängig sind.

b) Man bestimme $\mathbb{E}(XY)$.

c) Begründen Sie, dass die Kovarianz von X und Y Null ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 3e^{-x-y}, & y \in [2x, \infty),\ x \in [0, \infty), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der Dichte $f_{(X,Y)}$. Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**

a) Seien X und Y Zufallsvariablen, die unabhängig und geometrisch verteilt zum Parameter $p \in (0, 1)$ sind. Bestimmen Sie die Verteilung von $Z = X + Y$.

b) Seien nun $X \sim \Gamma(p_1, b)$ und $Y \sim \Gamma(p_2, b)$ für $p_1, p_2, b > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Z = X + Y$.

   Hinweis: Eine Gamma-verteilte Zufallsvariable $Z \sim \Gamma(p, b)$ hat die Dichte

   $$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$

   Weiterhin gilt für die Betafunktion:

   $$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

   wobei Γ hier die Gammafunktion bezeichnet.

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.