Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	13.01.2020
Abgabetermin:	20.01.2020

11. Übungsblatt

Aufgabe 1. In einer Urne befinden sich n Kugeln mit der Zahl „0“ und n Kugeln mit der Zahl „1“. Man zieht zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen. Es sei X der Wert der ersten Kugel und Y der Wert der zweiten Kugel.
Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Aufgabe 2. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $a > 0$. Wir definieren

$$Y = \begin{cases} X, & \text{falls } |X| > a \\ -X, & \text{falls } |X| \leq a. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

b) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass X und Y für eine geeignete Wahl von a unkorreliert sind.

Aufgabe 3. Seien X, Y Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment und $\operatorname{Var}(X) > 0$ sowie $\operatorname{Var}(Y) > 0$. Bestimmen Sie die Regressionsgleichung von Y bezüglich X, d.h. ermitteln Sie $a^*, b^* \in \mathbb{R}$, sodass

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[Y - (a + bX)\right]^2 = \mathbb{E}\left[Y - (a^* + b^*X)\right]^2$$

und zeigen Sie weiterhin

$$\mathbb{E}\left[Y - (a^* + b^*X)\right]^2 = \operatorname{Var}(Y)\left(1 - \rho(X,Y)^2\right).$$

☗ **Aufgabe 4** (6 Punkte)**.** Es seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\left(4x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 - 2y + 4\right)\right], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ normalverteilt ist.

b) Bestimmen Sie den Erwartungsvektor $\mathbb{E}X$ und die Kovarianzmatrix.

c) Was sind die Randverteilungen von X_1 und X_2?

☗ **Aufgabe 5** (6 Punkte)**.** Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus dem Kreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und Y, indem Sie die jeweilige Randdichte angeben.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}X$.

d) Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.