Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	20.01.2020
Abgabetermin:	27.01.2020

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei eine mathematische Stichprobe $X_1, X_2, \dots X_n$ zu einer Zufallsvariable X gegeben, wobei X $\text{Bin}(2, \theta)$-verteilt ist mit $0 \le \theta \le 1$. Ist der Schätzer

$$T(x_1, x_2 \dots x_n) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i)$$

erwartungstreu für θ^2?

Aufgabe 2. Um die Lebensdauer eines neuen Reifens zu überprüfen, werden durch Testfahrten folgende Werte (in 1000 km) ermittelt:

58 63 51 60 59 63 63 53 55 71 55.

a) Geben Sie erwartungstreue Punktschätzungen für den Erwartungswert und die Varianz der Lebensdauer der Reifen an.

b) Bestimmen Sie ein zweiseitiges Intervall, das den Mittelwert mit 90 prozentiger Sicherheit enthält. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Lebensdauer normalverteilt ist. Die Varianz wird mit $\sigma^2 = 30$ als bekannt vorausgesetzt.

c) Bestimmen Sie ein geeignetes einseitiges Intervall, das den Mittelwert mit 95 prozentiger Sicherheit enthält. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Lebensdauer normalverteilt ist, wobei die Varianz $\sigma^2 > 0$ unbekannt ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

i) Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe zu einer Zufallsvariablen X. Welche der folgenden Schätzungen für den Erwartungswert μ von X sind erwartungstreu?

$$\text{a) } \frac{X_1 + X_n}{n}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}, \quad \text{c) } \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i, \quad \text{d) } \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i.$$

ii) Es sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$, wobei a bekannt ist und b geschätzt werden soll. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe für X. Welche der folgenden Schätzungen sind erwartungstreu für b?

$$\text{a) } X_1, \quad \text{b) } X_1 + X_n - a, \quad \text{c) } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a).$$

Entscheiden Sie, welche Aussagen für die angegebenen Schätzer für b jeweils zutreffen:

a) $X_1 - a + X_2$ ist effizienter als $\frac{1}{2}(4X_1 - 2a)$.
b) $-a + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist effizienter als $2X_1 + X_2 - X_3 - a$.

⬆ **Aufgabe 4** (2 Punkte)**.** Sei X exponentialverteilt zum unbekannten Parameter $\lambda > 0$ und $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe zu X. Um λ zu bestimmen, betrachten wir den Schätzer

$$\widehat{\lambda}_n := \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{\lambda}_n$ konsistent ist.

⬆ **Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Im Folgenden sind die Anzahl der Tore bei bestimmten Partien der Fußball-Weltmeisterschaft 2014 gegeben.

3 1 2 6 5 3 4 3 2 5 5 2 6.

Für die Anzahl der Tore wird angenommen, dass sie normalverteilt sind.

a) Geben Sie das arithmetische Mittel und die erwartungstreue Punktschätzung für die Varianz der Grundgesamtheit an.

b) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ für den Erwartungswert bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$.

c) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ für den Erwartungswert, falls die Varianz unbekannt ist.

Abgabetermin: Die mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.