Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

WS 2019/2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt, Verena Köpp

Ausgabetermin:	27.01.2020
Abgabetermin:	03.02.2020

13. Übungsblatt

Aufgabe 1. Die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots X_n$, $n \in \mathbb{N}$, seien

a) geometrisch verteilt mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für p.

b) Poisson-verteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ.

Aufgabe 2. Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{für } x \in [0,a], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für ein unbekanntes $a > 0$. Man bestimme für eine konkrete Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ den Maximum-Likelihood Schätzer von a.
Hinweis: Differenzieren führt nicht zur Bestimmung des Schätzers.

Aufgabe 3.

a) Formulieren Sie den zentralen Grenzwertsatz.

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei zusätzlich $S_n := X_1 + X_2 + \ldots X_n$.
Es sei bekannt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}) = \frac{1}{4}.$$

Bestimmen Sie die Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$.

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)**.**

a) Es sei Z eine binomialverteilte Zufallsvariable, $Z \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Man berechne $\mathbb{E}(Z^2)$.

b) Ein radioaktives Präperat besteht aus 100000 Kernen. Erfahrungsgemäß zerfällt ein Kern mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10000}$ in einer Stunde.
Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 Kerne in einer Stunde zerfallen?

Aufgabe 5 (5 Zusatzpunkte)**.** Eine Studentin, die vor Kurzem eine Veranstaltung zur Wahrscheinlichkeitstheorie gehört hat, wartet an einer Haltestelle auf die Straßenbahn, welche sich leicht verspätet.
Die Studentin überlegt sich, dass man die Verspätung einer Straßenbahn an der Haltestelle (in Minuten) mittels einer Zufallsvariablen X beschreiben könnte. Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Straßenbahn bis zu einer Zeit x nach der planmäßigen Ankunftszeit erscheint, vermutet sie den folgenden Zusammenhang,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2\,. \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass F_X eine Verteilungsfunktion ist.

b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Straßenbahn um mehr als eine Minute verspätet?

d) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit auf die Straßenbahn.

e) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Verspätung der Straßenbahn in Sekunden. Bestimmen Sie
$$\mathbb{P}(30 \leq Y \leq 120)\,.$$

Aufgabe 6 (3 Zusatzpunkte)**.** Die Lebensdauer von Glühbirnen sei exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$. Um λ zu bestimmen, schaltet man n Glühbirnen ein und zählt die Anzahl der Glühbirnen, die zu einem vorgegebenen Zeitpunkt $T > 0$ noch brennen. Modellieren Sie diese mathematische Stichprobe geeignet und bestimmen Sie damit den Maximum-Likelihood Schätzer für λ.

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Montag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Gruppen von maximal drei Personen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen an der Tafel.