Stochastische Kontrolltheorie

Christoph Trautwein

October 21, 2019

Literatur:

- H. Pham, *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer, 2009
- N. Touzi, *Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE*, Springer, 2013
- J. Yong and X. Y. Zhou, *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer, 1999
- A. Chen, C. Mereu, and R. Stelzer, *Optimal investment with time–varying stochastic endowments*, SSRN, 2014

1 Stochastische Kontrollprobleme - Beispiele

Wir beginnen mit einleitenden Beispielen, um eine Motivation zu geben. Konzepte zum Lösen dieser Beispiele präsentieren präsentieren wir in den folgenden Kapiteln.

1.1 Portfoliooptimierung

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit einem risikolosen und einem risikobehafteten Asset, die zeit-stetig über ein endliches Intervall $[0, T]$ gehandelt werden können.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Der Preisprozess $(B(t))_{t\in[0,T]}$ des risikolosen Assets (Bond) erfüllt folgende deterministische Differentialgleichung:

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)\,dt \\ B(0) = p_0, \end{cases}$$

wobei $r > 0$ die Zinsrate ist. Der Preisprozess $(S(t))_{t\in[0,T]}$ des risikobehafteten Assets (Aktie) erfüllt folgende stochastische Differentialgleichung (SDE):

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t) \\ S(0) = p_1, \end{cases}$$

wobei $\mu > 0$ die Driftrate, $\sigma > 0$ die Volatilität und der Prozess $(W(t))_{t\geq 0}$ ein reellwertiger $\mathcal{F}_t$-adaptierter Wiener Prozess sind. Gewöhnlich hat man $\mu > r$, da anderseits niemand gewillt ist in die Aktie zu investieren.

Ziel: Der Investor möchte sein Vermögen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ maximieren.

Er hat die Möglichkeit einen Anteil $\pi(t)$ zum Zeitpunkt t in die Aktie zu investieren. Der Anteil $1-\pi(t)$ wird in den Bond investiert. Beachte, dass $\pi(t) < 0$ einen Leerverkauf der Aktie und $1-\pi(t) < 0$ einer Anleihe entspricht. Darüber hinaus hat der Investor die Möglichkeit zu einer Rate $c(t) \geq 0$ das Vermögen zum Zeitpunkt t zu konsumieren. Damit erhalten wir folgende SDE für den Vermögensprozess:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \pi(t)X(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + (1-\pi(t))X(t)\frac{dB(t)}{B(t)} - c(t)\,dt \\ &= \pi(t)X(t)(\mu\,dt + \sigma\,dW(t)) + (1-\pi(t))X(t)r\,dt - c(t)\,dt \\ &= ([r + (\mu - r)\pi(t)]X(t) - c(t))\,dt + \sigma\,\pi(t)X(t)\,dW(t). \end{aligned}$$

Für $X(0) = x_0 > 0$ wählt der Investor eine Anlagestrategie $\pi(t)$ und einen Konsumplan $c(t)$, so dass der diskontierte Nutzen mit Zinsrate $\delta > 0$

$$J(X,\pi,c) = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta t}h_1(c(t))\,dt + e^{-\delta T}h_2(X(T))\right]$$

maximiert wird. Um ein geeignetes Optimalitätskriterium zu finden, werden die Präferenzen des Investors berücksichtigt. Wir nehmen an:

- **Rationalität:** Größere Auszahlungen werden gegenüber Kleineren präferiert.
- **Risikoaversion:** Sichere Auszahlungen werden gegenüber Unsicheren präferiert.

Diese Präferenzen können wir durch die Nutzenfunktionen $h_1, h_2\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ darstellen. Aus der Rationalität schließen wir, dass die Funktionen monoton wachsend sein sollten. Die Risikoaversion lässt sich formulieren als $h_1(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[h_1(X)]$ bzw. $h_2(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[h_2(X)]$ für eine Zufallsgröße X. Aus der Jensenschen Ungleichung ist bekannt, dass diese Bedingung für konkave Funktionen stets erfüllt ist. Typische Beispiele sind:

(i) **Potenznutzen:** Für $i = 1,2$, sind die Funktionen $h_i\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ für festes $\gamma < 1$ mit $\gamma \neq 0$ gegeben durch

$$h_i(y) = \frac{1}{\gamma}y^\gamma.$$

(ii) **Logarithmische Nutzen:** Für $i = 1,2$, sind die Funktionen $h_i\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h_i(y) = \log(y).$$

1.2 Verfolgung eines gewünschten Zustandes

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Wir nehmen an, dass der stochastische Prozess $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ die SDE

$$\begin{cases} dY(t) = [A(t)Y(t) + B(t)u(t) + b(t)]\, ds \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} [C_j(t)Y(t) + D_j(t)u(t) + \sigma_j(t)]\, dW_j(t) \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

genügt. Der Prozess $(u(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine Steuerung/Kontrolle mit Werten in $\mathbb{R}^m$ und $(W_j(t))_{t\geq 0}$ sind reelwertige $\mathcal{F}_t$-adapterite Wiener Prozesse für $j = 1, ..., d$. Weiterhin erfüllen die Matrizen $A(t), C_j(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t), D_j(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sowie $b(t), \sigma_j(t) \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, ..., d$ geeignete Voraussetzungen, so dass die SDE eine eindeutige Lösung besitzt.

Ziel: Finde eine Kontrolle, so dass über das komplette Zeitintervall $Y(t)$ möglichst nah an einem vorgegebenen gewünschten Zustand verläuft.

Oftmals ist der gewünschte Zustand deterministisch, welchen wir durch die Funkionen $Y_g\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ bezeichnen. Weiterhin nehmen wir an, dass durch die Kontrolle Kosten entstehen, z. B. durch den Einsatz von Energie. Somit wollen wir das Funktional

$$J(Y,u) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \|Y(t) - Y_g(t)\|_n^2 + \|u(t)\|_m^2 dt\right]$$

minimieren. Wir bemerken, dass $(X(t))_{t\in[0,T]}$ definiert durch $X(t) = Y(t) - Y_g(t)$ wieder durch eine SDE beschrieben werden kann. Oftmals genügt es $Y_g(t) = 0$ anzunehmen. Somit haben wir

$$J(X,u) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \langle X(t), X(t)\rangle_n + \langle u(t), u(t)\rangle_m dt\right].$$

Dieses Problem lässt sich in die große Klasse von linear quadratischen stochastischen Kontrollproblemen einordnen. Hier wird das zu minimierende Funktional in folgender allgemeinen Form angegeben:

$$\begin{aligned} J(X,u) = \mathbb{E}\Bigg[&\frac{1}{2}\int_0^T \langle Q(t)X(t), X(t)\rangle_n + 2\,\langle S(t)X(t), u(t)\rangle_m + \langle R(t)u(t), u(t)\rangle_m\, dt \\ &+ \frac{1}{2}\,\langle GX(T), X(T)\rangle_n\Bigg], \end{aligned}$$

wobei die Matrizen $Q(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $R(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geeignete Voraussetzungen erfüllen, so dass das Funktional wohldefiniert ist.

1.3 Portfoliooptimierung mit unsicherem Einkommen

Wir betrachten wieder einen Finanzmarkt mit einem risikolosen und einem risikobehafteten Asset, die zeit-stetig über ein endliches Intervall $[0, T]$ gehandelt werden können.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Der Preisprozess $(B(t))_{t\in[0,T]}$ des Bonds und der Preisprozess $(S(t))_{t\in[0,T]}$ der Aktie erfüllen die Gleichungen

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)\,dt \\ B(0) = p_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t) \\ S(0) = p_1, \end{cases}$$

wobei $r, \mu, \sigma > 0$ und $(W(t))_{t\geq 0}$ ein reelwertiger $\mathcal{F}_t$-adaptierter Wiener Prozess sind. Weiterhin sei $(c(t))_{t\in[0,T]}$ der Prozess des Einkommens, welcher die SDE

$$\begin{cases} dc(t) = \mu_c(t)c(t)\,dt + \sigma_c(t)c(t)\,dW_c(t) \\ c(0) = c_0, \end{cases}$$

wobei $\mu_c\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\sigma_c\colon [0,T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ cádlág Funktionen sind. Der Prozess $(W_c(t))_{t\geq 0}$ ist ein reelwertiger $\mathcal{F}_t$-adaptierter Wiener Prozess. Die Prozesse $(W_c(t))_{t\geq 0}$ und $(W(t))_{t\geq 0}$ seien korreliert mit Koeffizienten $\rho \in (-1, 1)$. Dann existiert ein Wiener Prozess $(\widetilde{W}(t))_{t\geq 0}$ unabhängig von $(W(t))_{t\geq 0}$, so dass $W_c(t) = \rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,\widetilde{W}(t)$. Der Investor hat die Möglichkeit einen Anteil $\pi(t)$ zum Zeitpunkt t in die Aktie zu investieren. Der Anteil $1 - \pi(t)$ wird in das risikolose Asset investiert. Zusätzlich wird zufälliges Einkommen $c(t)$ generiert. Somit erfüllt der Vermögensprozess $(X(t))_{t\in[0,T]}$ die SDE

$$\begin{aligned} dX(t) &= \pi(t)X(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + (1-\pi(t))X(t)\frac{dB(t)}{B(t)} + c(t)\,dt \\ &= ([r + (\mu - r)\pi(t)]X(t) + c(t))\,dt + \sigma\,\pi(t)X(t)\,dW(t). \end{aligned}$$

Für $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ wählt der Investor eine Anlagestrategie $\pi(t)$, so dass der diskontierte Nutzen mit Zinsrate $\delta > 0$

$$J(X, c, \pi) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} h(X(T))\right]$$

maximiert wird, wobei $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion ist wie in Abschnitt 1.1.

2 Starke Formulierung des Kontrollproblems

In diesem Kapitel werden die Beispiele aus den vorangegangenen Kapitel in einem allgemeinen Setting eingeordnet. Wir geben Bedingungen an, so dass die Existenz einer eindeutigen Lösung von kontrollierten SDEs gewährleistet wird und das Kontrollproblem wohldefiniert ist.