Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Der Zustand $(X(t))_{t\in[0,T]}$ erfülle folgende SDE in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X(t), u(t))\, dW(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

wobei $(W(t))_{t\geq 0}$ ein Wiener Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$ ist. Die nichtleere Menge der zulässigen Kontrollen U_0 umfasst alle $\mathcal{F}_t$-adaptierten Prozesse $(u(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\mathbb{E}\int_0^T \|u(t)\|_m^2 dt < \infty$. Weiterhin machen folgende Annahmen:

(A0) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist die natürlich Filtration erzeugt durch $(W(t))_{t\geq 0}$ und ergänzt mit allen $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$;

(A1) die Funktionen $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sind messbar, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t,x,u)\|_n + \|\sigma(t,x,u)\|_{n\times d} \leq K(1 + \|x\|_n + \|u\|_m),$$
$$\|b(t,x,u) - b(t,y,u)\|_n + \|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)\|_{n\times d} \leq K\|x-y\|_n,$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist.

Wir erhalten damit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.1).

Satz 2.1. *Seien x_0 eine feste $\mathbb{R}^n$-wertige quadratisch integrierbare $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsgröße und $u \in U_0$ fest gegeben. Dann existiert eine eindeutige Lösung $(X(t))_{t\in[0,T]}$ von (2.1), so dass*

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X(s), u(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s).$$

Der Prozess $(X(t))_{t\in[0,T]}$ ist $\mathcal{F}_t$-adaptiert und es gilt für eine Konstante $C_T > 0$

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_n^2 \leq C_T \left(1 + \mathbb{E}\|x_0\|_n^2 + \mathbb{E}\int_0^T \|u(t)\|_m^2 dt\right). \tag{2.2}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathcal{X}_T$ die Menge aller $\mathcal{F}_t$-adaptierter Prozesse $(x(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|x(t)\|_n^2 < \infty$. Die Menge $\mathcal{X}_T$ ausgestattet mit der Norm $\|x\|_{\mathcal{X}_T}^2 = \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|x(t)\|_n^2$ für alle $x \in \mathcal{X}_T$ ist ein Banachraum. Weiterhin führen wir die Norm $\|x\|_{\mathcal{X}_T^\gamma}^2 = \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} e^{-\gamma t}\|x(t)\|_n^2$ für alle $x \in \mathcal{X}_T$ ein, wobei $\gamma > 0$ eine Konstante ist, welche wir unten genauer beschreiben. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_T}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_T^\gamma}$ äquivalent auf $\mathcal{X}_T$. Wir definieren die Abbildung

$$\Psi(x)(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s), u(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), u(s))\, dW(s).$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass Ψ den Raum $\mathcal{X}_T$ in sich selbst abbildet. Sei $x \in \mathcal{X}_T$. Wir erhalten mittels der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\Psi(x)\|_{\mathcal{X}_T}^2 \leq 3\,\mathbb{E}\|x_0\|_n^2 + 3\,\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t b(s,x(s),u(s))\,ds\right\|_n^2 \\ + 3\,\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t \sigma(s,x(s),u(s))\,dW(s)\right\|_n^2.\end{aligned}$$

Aus der Jensenschen Ungleichung, der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung und der Itô–Isometrie folgt

$$\begin{aligned}\|\Psi(x)\|_{\mathcal{X}_T}^2 \leq 3\,\mathbb{E}\|x_0\|_n^2 + 3T\,\mathbb{E}\int_0^T \|b(s,x(s),u(s))\|_n^2 ds \\ + 12\,\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma(s,x(s),u(s))\|_{n\times d}^2 ds.\end{aligned}$$

Mit der Annahme **(A1)** schließen wir für eine Konstante $C > 0$

$$\|\Psi(x)\|_{\mathcal{X}_T}^2 \leq C\left(1 + \mathbb{E}\|x_0\|_n^2 + \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|x(t)\|_n^2 + \mathbb{E}\int_0^T \|u(t)\|_m^2 dt\right) < \infty.$$

Weiterhin ist der Prozess $(\Psi(x)(t))_{t\in[0,T]}$ wegen Annahme **(A1)** $\mathcal{F}_t$-adaptiert.
Schritt 2: Wir zeigen, dass Ψ eine Kontraktion auf $\mathcal{X}_T$ ist, d.h. für alle $x, y \in \mathcal{X}_T$ gilt $\|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{\mathcal{X}_T^\gamma}^2 \leq M\|x - y\|_{\mathcal{X}_T}^2$ mit einer Konstante $0 < M < 1$. Seien $x, y \in \mathcal{X}_T$. Ähnlich wie in Schritt 1 erhalten wir

$$\begin{aligned}&\|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{\mathcal{X}_T^\gamma}^2 \\ &\leq 2\,\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} e^{-\gamma t}\left\|\int_0^t b(s,x(s),u(s)) - b(s,y(s),u(s))\,ds\right\|_n^2 \\ &\quad + 2\,\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} e^{-\gamma t}\left\|\int_0^t \sigma(s,x(s),u(s)) - \sigma(s,y(s),u(s))\,dW(s)\right\|_n^2 \\ &\leq 2T\,\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}e^{-\gamma s}\,\|b(s,x(s),u(s)) - b(s,y(s),u(s))\|_n^2\,ds \\ &\quad + 8\,\mathbb{E}\int_0^T e^{-\gamma(T-s)}e^{-\gamma s}\,\|\sigma(s,x(s),u(s)) - \sigma(s,y(s),u(s))\|_{n\times d}^2\,ds.\end{aligned}$$

Aus Annahme **(A1)** folgt für eine Konstante $C > 0$

$$\begin{aligned}\|\Psi(x)-\Psi(y)\|^2_{\mathcal{X}_T^\gamma} &\leq C\|x-y\|^2_{\mathcal{X}_T^\gamma}\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}ds+\int_0^T e^{-\gamma(T-s)}ds\right)\\ &\leq \frac{C}{\gamma}\|x-y\|^2_{\mathcal{X}_T^\gamma}.\end{aligned}$$

Wir wählen $\gamma > 0$, so dass $\sqrt{\frac{C}{\gamma}} < 1$. Somit ist Ψ eine Kontraktion auf $\mathcal{X}_T$. Mit Schritt 1 und 2 sowie den Fixpunktsatz von Banach erhalten wir ein eindeutiges Element $X \in \mathcal{X}_T$, so dass $\Psi(X)(t) = X(t)$ für alle $t \in [0,T]$ und $\mathbb{P}$-fast sicher.
Schritt 3: Wir zeigen Ungleichung (2.2). Ähnlich wie in Schritt 1 erhalten wir für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|X(s)\|_n^2 \leq 3\,\mathbb{E}\|x_0\|_n^2 &+ 3t\,\mathbb{E}\int_0^t\|b(r,X(r),u(r))\|_n^2dr\\ &+12\,\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma(r,X(r),u(r))\|^2_{n\times d}dr\\ &\leq c_T\left[1+\mathbb{E}\|x_0\|_n^2+\mathbb{E}\int_0^T\|u(r)\|_m^2dr+\int_0^t\mathbb{E}\sup_{s\in[0,r]}\|X(s)\|_n^2dr\right],\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini angewendet haben. Aus dem Lemma von Gronwall folgt Ungleichung (2.2). □

Bemerkung 2.2. *(i) Man kann zeigen, dass pfadweise $(X(t))_{t\in[0,T]}$ stetig und eindeutig ist. Da der Prozess $\mathcal{F}_t$-adaptiert ist folgt, dass $(X(t))_{t\in[0,T]}$ vorhersehbar ist.*

(ii) Der Prozess $(X(t))_{t\in[0,T]}$ ist im allgemeinen kein Martingal.

(iii) Der Prozess $(X(t))_{t\in[0,T]}$ kann als Funktion in Abhängigkeit vom Startwert x_0 und der Kontrolle u betrachtet werden.

Für eine quadratisch integrierbare $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsgröße x_0 mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und $u \in U_0$ führen das Kostenfunktional

$$J(x_0,u)=\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,X(t),u(t))\,dt+g(X(T))\right] \tag{2.3}$$

ein.

Ziel: Finde $\overline{u} \in U_0$, so dass

$$J(x_0,\overline{u}) = \sup_{u\in U_0} J(x_0,u).$$

Eine solche Kontrolle $\overline{u} \in U_0$ wird optimale Kontrolle genannt. Wir treffen folgende Annahme:

(A2) die Funktionen $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^n \times \to \mathbb{R}$ sind messbar und gleichmäßig stetig, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in \mathbb{R}^m$

$$|f(t,x,u)| + |g(x)| \leq K(1 + \|x\|_n^2 + \|u\|_m),$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist.

Bemerkung 2.3. *Im Folgenden nehmen wir immer an, dass **(A0)** - **(A2)** gelten. Beachte, dass diese Annahmen die Existenz einer optimalen Kontrolle nicht sicherstellen.*

Die Annahme **(A2)** und Satz 2.1 lassen schließen, dass das Kostenfunktional J wohldefiniert ist.

Beispiel 2.4. *(1) Wir betrachten das Portfoliooptimierungsproblem aus Abschnitt 1.1. Hier sind $n = d = 1$ und $m = 2$. Die Kontrolle $(u(t))_{t\in[0,T]}$ ist gegeben durch*

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(t) \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Der Vermögensprozess $(X(t))_{t\in[0,T]}$ bezeichnet den Zustand mit

$$\begin{aligned} b(t, X(t), u(t)) &= [r + (\mu - r)\pi(t)]X(t) - c(t), \\ \sigma(t, X(t), u(t)) &= \sigma\, \pi(t)X(t). \end{aligned}$$

Hier wird der diskontierte Nutzen J als Kostenfunktional (2.3) maximiert mit

$$\begin{aligned} f(t, X(t), u(t)) &= e^{-\delta t} h_1(c(t)), \\ g(X(T)) &= e^{-\delta T} h_2(X(T)). \end{aligned}$$

(2) In dem Beispiel aus Abschnitt 1.2 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y_g(t) = 0$ annehmen. Somit erfüllt der Zustand $(X(t))_{t\in[0,T]}$ die SDE (2.1) mit

$$\begin{aligned} b(t, X(t), u(t)) &= A(t)X(t) + B(t)u(t) + b(t), \\ \sigma(t, X(t), u(t)) &= \sum_{j=1}^{d} [C_j(t)X(t) + D_j(t)u(t) + \sigma_j(t)]. \end{aligned}$$

Hier wird das Kostenfunktional J minimiert, welches (2.3) entspricht mit

$$\begin{aligned} f(t, X(t), u(t)) &= \frac{1}{2}[\langle Q(t)X(t), X(t)\rangle_n + 2\,\langle S(t)X(t), u(t)\rangle_m \\ &\quad + \langle R(t)u(t), u(t)\rangle_m], \\ g(X(T)) &= \frac{1}{2}\,\langle GX(T), X(T)\rangle_n\,. \end{aligned}$$

Beachte, dass J minimiert wird indem $-J$ maximiert wird.

(3) *In Abschnitt 1.3 haben wir* $n = d = 2$ *und* $m = 1$. *Die Kontrolle* $(u(t))_{t\in[0,T]}$ *ist definiert durch* $u(t) = \pi(t)$. *Der Zustand* $(\tilde{X}(t))_{t\in[0,T]}$ *ist durch den Vermögensprozess* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *und das Einkommen* $(c(t))_{t\in[0,T]}$ *charakterisiert, d.h.*

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1(t) \\ \tilde{X}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt $(\tilde{X}(t))_{t\in[0,T]}$ *die SDE* (2.1) *mit*

$$\begin{aligned} b(t, \tilde{X}(t), u(t)) &= \begin{pmatrix} b_1(t, \tilde{X}(t), u(t)) \\ b_2(t, \tilde{X}(t), u(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + (\mu - r)\pi(t)]X(t) + c(t) \\ \mu_c(t)c(t) \end{pmatrix}, \\ \sigma(t, \tilde{X}(t), u(t)) &= \begin{pmatrix} \sigma_1(t, \tilde{X}(t), u(t)) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t, \tilde{X}(t), u(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma\, \pi(t)X(t) & 0 \\ 0 & \sigma_c(t)c(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wieder wird der diskontierte Nutzen J *als Kostenfunktional* (2.3) *maximiert mit*

$$\begin{aligned} f(t, \tilde{X}(t), u(t)) &= 0, \\ g(\tilde{X}(T)) &= e^{-\delta T} h(X(T)). \end{aligned}$$

3 Dynamische Programmierung und Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Hier werden wir das Lösungskonzept der dynamischen Programmierung für das in dem vorangegangen Kapitel formulierten Kontrollproblem präsentieren. Grundlegende Idee ist eine Familie von Kontrollproblemen mit unterschiedlichen Startzeitpunkten und unterschiedlichen Startwerten einzuführen. Somit ist das Supremum dieser Probleme eine Funktion der Startzeitpunkte und Startwerte, welche Wertefunktion genannt wird. Unter einer gewissen Glattheitsvoraussetzung zeigen wir, dass die Wertefunktion eine partielle Differentialgleichung (PDE) erfüllt und wir die optimale Kontrolle auf Grundlage der Lösung dieser PDE ermitteln können. Anhand einiger Beispielen aus Kapitel 1 präsentieren wir die Anwendung des Lösungskonzept.

3.1 Prinzip der dynamischen Programmierung

Für das Kontrollproblem aus Abschnitt 2 führen wir zunächst eine Familie von Kontrollproblemen ein. Dazu setzen wir $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{W(r) : t \le r \le s\}$ ergänzt mit allen $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$. Anstelle des Kostenfunktionals (2.3) betrachten wir die Ertragsfunktion $J\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_0 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X(s), u(s))\, ds + g(X(T))\right],$$