wobei $(X(s))_{s\in[t,T]}$ folgende SDE erfüllt:

$$\begin{cases} dX(s) = b(s, X(s), u(s))\, ds + \sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) \\ X(t) = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Die nichtleere Menge der zulässigen Kontrollen U_t umfasst alle $\mathcal{F}_s^t$-adaptierten Prozesse $(u(s))_{s\in[t,T]}$ mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$\mathbb{E}\int_t^T \|u(s)\|_m^2 ds < \infty.$$

Aus **(A1)** erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.1) analog zu Satz 2.1.

Ziel: Finde $\overline{u} \in U_t$, so dass

$$J(t, x, \overline{u}) = \sup_{u\in U_t} J(t, x, u). \tag{3.2}$$

Damit können wir die sogenannte Wertefunktion $V\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u\in U_t} J(t, x, u) \\ &= \sup_{u\in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X(s), u(s))\, ds + g(X(T))\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

einführen. Wir erhalten das Prinzip der dynamischen Programmierung.

Satz 3.1. *Sei $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Stoppzeit τ mit Werten in $[t, T]$*

$$V(t, x) = \sup_{u\in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s), u(s))\, ds + V(\tau, X(\tau))\right].$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $(X(s; t, x, u))_{s\in[t,T]}$ die Lösung von System (3.1). Aufgrund der pfadweisen Eindeutigkeit gilt für alle $s \in [\tau, T]$

$$X(s; t, x, u) = X(s; \tau, X(\tau), u).$$

Wir erhalten für alle $u \in U_t$

$$\begin{aligned}
J(t,x,u) &= \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds + g(X(T;t,x,u))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds \right.\\
&\qquad \left. + \mathbb{E}\left[\int_\tau^T f(s, X(s;\tau,X(\tau),u), u(s))\,ds + g(X(T;\tau,X(\tau),u)) \middle| \mathcal{F}_\tau^t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds + J(\tau, X(\tau), u)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds + V(\tau, X(\tau))\right].
\end{aligned}$$

Somit schließen wir

$$V(t,x) = \sup_{u \in U_t} J(t,x,u) \leq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s), u(s))\,ds + V(\tau, X(\tau))\right]. \tag{3.4}$$

Als nächstes wählen wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Kontrolle $u_\varepsilon \in U_t$, so dass

$$J(\tau, X(\tau), u_\varepsilon) \geq V(\tau, X(\tau))) - \varepsilon.$$

Wir definieren für eine beliebige Kontrolle $u \in U_t$

$$u^*(s) = \begin{cases} u(s) & \text{für } s \in [t,\tau) \\ u_\varepsilon(s) & \text{für } s \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Dann ist $u^* \in U_t$ und es gilt

$$\begin{aligned}
V(t,x) &\geq J(t,x,u^*) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds + J(\tau, X(\tau), u_\varepsilon)\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s;t,x,u), u(s))\,ds + V(\tau, X(\tau)))\right] - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $u \in U_t$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, erhalten wir

$$V(t,x) \geq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s), u(s))\,ds + V(\tau, X(\tau))\right]. \tag{3.5}$$

Aus den Ungleichung (3.4) und (3.5) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.2. *In dem Beweis zu Satz 3.1 haben wir die folgende zu dem Prinzip der dynamischen Progammierung äquivalente Formulierung gezeigt:*

- $V(t,x) \leq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s), u(s))\, ds + V(\tau, X(\tau))\right]$ *und*
- $V(t,x) \geq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(s, X(s), u(s))\, ds + V(\tau, X(\tau))\right] - \varepsilon$ *für beliebiges* $\varepsilon > 0$.

3.2 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Basierend auf dem Prinzip der dynamischen Programmierung wollen wir das infinitesimale Verhalten der Wertefunktion unter zusätzlichen Glattheitsbedingungen betrachten.

Sei $\mathbb{S}^n$ die Menge der symmetrischen Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Wir definieren die Funktion $H\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u \in U}\left[b'(t,x,u)p + \frac{1}{2}Tr[\sigma(t,x,u)\sigma'(t,x,u)M] + f(t,x,u)\right]. \tag{3.6}$$

Weiterhin bezeichnen wir mit D_x und D_x^2 den Gradienten und die Hesse-Matrix einer Funktion bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$. Für $u \in U$ führen wir den Operator

$$\mathcal{L}^u\varphi(t,x) = b'(t,x,u)D_x\varphi(t,x) + \frac{1}{2}Tr[\sigma(t,x,u)\sigma'(t,x,u)D_x^2\varphi(t,x)]$$

ein, wobei $\varphi \in C^{0,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$. Wir erhalten folgendes Resultat.

Satz 3.3. *Sei V gegeben durch (3.3), so dass $V \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$. Weiterhin sei $f(\cdot,\cdot,u)$ stetig auf $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ für festes $u \in U$ und H gegeben durch (3.6) sei stetig. Dann ist V die Lösung folgender PDE mit Endbedingung:*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}V(t,x) - H(t,x,D_xV(t,x),D_x^2V(t,x)) = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ V(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Beweis. **Schritt 1:** Seien $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ und $u \in U$. Wir zeigen

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) - H(t,x,D_xV(t,x),D_x^2V(t,x)) \geq 0.$$

Sei $(X(s))_{s\in[t,T]}$ die Lösung der SDE (3.1), wobei $u(s) = u$ für alle $s \in [t,T]$. Wir führen die Stoppzeit

$$\tau_h = \inf\{s > t\colon s - t \geq h \text{ oder } \|X(s) - x\|_n \geq 1\}$$