für $h \in (0, T-t]$ ein. Beachte, dass $\mathbb{P}$-f.s. $\tau_h \to t$ für $h \to 0$ und $\tau_h = t + h$ für hinreichend kleines $h \leq \hat{h}(\omega)$. Unter Anwendung der Itô-Formel erhalten wir

$$
\begin{aligned}
V(\tau_h, X(\tau_h)) - V(t,x) = &\int_t^{\tau_h} \frac{\partial}{\partial t} V(s, X(s)) + \mathcal{L}^u V(s, X(s))\, ds \\
&+ \int_t^{\tau_h} [D_x V(s, X(s)]' \sigma(s, X(s), u)\, dW(s).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Beachte, dass $D_x V(s, X(s))$ beschränkt ist für $s \in [t, \tau_h]$. Mit Annahme **(A1)** können wir schließen, dass der Prozess $(Z(r))_{r \in [t,T]}$ gegeben durch

$$
Z(r) = \int_t^{r \wedge \tau_h} [D_x V(s, X(s)]' \sigma(s, X(s), u)\, dW(s)
$$

ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Mit dem Prinzip der dynamischen Programmierung aus Satz 3.1 folgt

$$
0 \leq -\mathbb{E}[V(\tau_h, X(\tau_h)) - V(t,x)] - \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h} f(s, X(s), u)\, ds\right].
$$

Weiter erhalten wir mit Gleichung (3.8)

$$
0 \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h} -\frac{\partial}{\partial t} V(s, X(s)) - \mathcal{L}^u V(s, X(s)) - f(s, X(s), u)\, ds\right].
$$

Nach Voraussetzung und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir zunächst für $h \to 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h} -\frac{\partial}{\partial t} V(s, X(s)) - \mathcal{L}^u V(s, X(s)) - f(s, X(s), u)\, ds \\
&\to -\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) - \mathcal{L}^u V(t,x) - f(t,x,u).
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz der majorisierten Konvergenz schlussfolgern wir

$$
-\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) - \mathcal{L}^u V(t,x) - f(t,x,u) \geq 0.
$$

Da $u \in U$ beliebig gewählt wurde, folgt

$$
-\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) - H(t, x, D_x V(t,x), D_x^2 V(t,x)) \geq 0. \tag{3.9}
$$

**Schritt 2:** Wir zeigen für alle $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$

$$-\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) - H(t,x,D_x V(t,x), D_x^2 V(t,x)) \leq 0,$$

was wir durch ein Widerspruchsbeweis demonstrieren. Dazu nehmen wir an, dass $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,D_x V(t_0,x_0), D_x^2 V(t_0,x_0)) < 0.$$

Definiere die Funktion $\varphi \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ durch

$$\varphi(t,x) = V(t,x) + \varepsilon \left( |t-t_0|^2 + \|x-x_0\|_n^4 \right)$$

für $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\varphi(t_0,x_0) - V(t_0,x_0) = 0, && \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0,x_0) - \frac{\partial}{\partial t} V(t_0,x_0) = 0, \\ &D_x\varphi(t_0,x_0) - D_x V(t_0,x_0) = 0, && D_x^2\varphi(t_0,x_0) - D_x^2 V(t_0,x_0) = 0. \end{aligned}$$

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + H(t,x,D_x\varphi(t,x), D_x^2\varphi(t,x)) < 0, \quad (t,x) \in \mathcal{N}_r \tag{3.10}$$

für hinreichend kleines $r > 0$, wobei $\mathcal{N}_r = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \colon |t-t_0|^2 + \|x-x_0\|_n^4 < r\}$. Sei $(X(s))_{s\in[t_0,T]}$ die Lösung der SDE (3.1) mit Anfangsbedingung $X(t_0) = x_0$ für eine beliebige Kontrolle $u \in U_{t_0}$. Wir führen die Stoppzeit

$$\tau = \inf\{s > t_0 \colon (s, X(s)) \notin \mathcal{N}_r\}$$

ein. Aufgrund der pfadweisen Stetigkeit erhalten wir $(\tau, X(\tau)) \in \partial\mathcal{N}_r$ und es gilt $\varphi(\tau, X(\tau)) - V(\tau, X(\tau)) = \varepsilon r$. Aus der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} V(\tau, X(\tau)) - V(t_0,x_0) &= \varphi(\tau, X(\tau)) - \varphi(t_0,x_0) - \varepsilon r \\ &= \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s,X(s)) + \mathcal{L}^u\varphi(s,X(s))\, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tau} [D_x\varphi(s,X(s))]'\sigma(s,X(s),u(s))\, dW(s) - \varepsilon r. \end{aligned}$$

Beachte, dass $D_x\varphi(s,X(s))$ beschränkt ist für $s \in [t_0,\tau]$. Mit Annahme **(A1)** können wir schließen, dass $(Z(r))_{r\in[t_0,T]}$ gegeben durch

$$Z(r) = \int_{t_0}^{r\wedge\tau} [D_x\varphi(s,X(s)]'\sigma(s,X(s),u)\, dW(s)$$

ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Ferner haben wir mit (3.10) für alle $s \in [t_0, \tau]$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\varphi(s, X(s)) + \mathcal{L}^u \varphi(s, X(s)) \\
&\leq \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s, X(s)) + H(s, X(s), D_x\varphi(s, X(s)), D_x^2\varphi(s, X(s))) - f(s, X(s), u(s)) \\
&\leq -f(s, X(s), u(s)).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle $u \in U_{t_0}$

$$V(t_0, x_0) \geq \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{\tau} f(s, X(s), u(s))\, ds + V(\tau, X(\tau))\right] + \varepsilon r.$$

Andererseits gilt nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung aus Satz 3.1

$$V(t_0, x_0) = \sup_{u \in U_{t_0}} \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{\tau} f(s, X(s), u(s))\, ds + V(\tau, X(\tau))\right],$$

was ein Widerspruch ist. Somit gilt für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t, x) - H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) \leq 0. \tag{3.11}$$

Nach Definition gilt $V(T, x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und aus den Ungleichungen (3.9) und (3.11) folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 3.4.** *Das System* (3.7) *wird Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) Gleichung genannt.*

## 3.3 Verifikationssatz

Um die Optimalität einer Kontrolle zu zeigen, benötigen wir die Umkehrung von Satz 3.3, d.h. jede Lösung der HJB Gleichung entspricht der Wertefunktion. Dies wird durch den sogenannten Verifikationssatz sicher gestellt.

**Satz 3.5.** *Sei $v \in C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, so dass*

$$|v(t, x)| \leq K(1 + \|x\|_n^2).$$

*(i) Wenn*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}v(t, x) - H(t, x, D_x v(t, x), D_x^2 v(t, x)) \geq 0, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \\ v(T, x) \geq g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

*dann $v(t, x) \geq V(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.*