(ii) Wir nehmen an, dass $v(T,x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin existiere eine Funktion $\overline{u}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to U$, so dass für alle $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - \mathcal{L}^{\overline{u}(t,x)} v(t,x) - f(t,x,\overline{u}(t,x)) \end{aligned}$$

gilt und die SDE

$$\begin{cases} d\overline{X}(s) = b(s,\overline{X}(s),\overline{u}(s,\overline{X}(s)))\, ds + \sigma(s,\overline{X}(s),\overline{u}(s,\overline{X}(s)))\, dW(s), & s \in [t,T] \\ \overline{X}(t) = x \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Dann gilt für alle $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$

$$v(t,x) = V(t,x)$$

und $\overline{u} = \overline{u}(\cdot, \overline{X}(\cdot)) \in U_t$ ist eine optimale Kontrolle von (3.2).

Beweis. (i) Seien $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ und $u \in U_t$. Weiterhin seien $(X(s))_{s \in [t,T]}$ die Lösung der SDE (3.1) und τ eine Stoppzeit mit Werten in $[t,\infty)$. Wir erhalten mit der Iô Formel für alle $s \in [t,T)$

$$\begin{aligned} v(s \wedge \tau, X(s \wedge \tau)) = v(t,x) &+ \int_t^{s \wedge \tau} \frac{\partial}{\partial t} v(r,X(r)) + \mathcal{L}^u v(r,X(r))\, dr \\ &+ \int_t^{s \wedge \tau} [D_x v(r,X(r)]' \sigma(r,X(r),u(r))\, dW(r). \end{aligned}$$

Definiere die Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\tau_n = \inf \left\{ s \geq t \colon \int_t^s \| [D_x v(r,X(r)]' \sigma(r,X(r),u(r)) \|^2_{n \times d} dr \geq n \right\}. \tag{3.12}$$

Dann ist der Prozess $(Z_n(s))_{s \in [t,T]}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$Z_n(s) = \int_t^{s \wedge \tau_n} [D_x v(r,X(r)]' \sigma(r,X(r),u(r))\, dW(r)$$

ein quadratisch integrierbares Martingal und wir erhalten für alle $s \in [t,T)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[v(s \wedge \tau_n, X(s \wedge \tau_n))] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{s \wedge \tau_n} \frac{\partial}{\partial t} v(r,X(r)) + \mathcal{L}^u v(r,X(r))\, dr \right].$$

Nach Voraussetzung gilt für alle $r \in [t,T)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} v(r,X(r)) + \mathcal{L}^u v(r,X(r)) + f(r,X(r),u(r)) \\
&\leq \frac{\partial}{\partial t} v(r,X(r)) + H(r,X(r),D_x v(r,X(r)),D_x^2 v(r,X(r))) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

und somit folgt für alle $s \in [t,T)$

$$\mathbb{E}[v(s\wedge\tau_n, X(s\wedge\tau_n))] \leq v(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(r,X(r),u(r))\,dr\right].$$

Nach Voraussetzung gilt für alle $s \in [t,T)$ und $\mathbb{P}$-f.s.

$$\begin{aligned}
|v(s\wedge\tau_n, X(s\wedge\tau_n))| &\leq K(1+\sup_{s\in[t,T]}\|X(s)\|_n^2), \\
\left|\int_t^{s\wedge\tau_n} f(r,X(r),u(r))\,dr\right| &\leq \int_t^T |f(r,X(r),u(r))|\,dr.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.1 und Annahme **(A2)** sind die rechten Seiten integrierbar. Damit folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz für alle $s \in [t,T)$

$$\mathbb{E}[v(s,X(s))] \leq v(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(r,X(r),u(r))\,dr\right].$$

Da $v \in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, erhalten wir für $s \to T$ aus dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\mathbb{E}[g(X(T))] \leq v(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r,X(r),u(r))\,dr\right].$$

Wir können schließen $v(t,x) \geq J(t,x,u)$. Da $u \in U_t$ beliebig gewählt wurde, folgt $v(t,x) \geq V(t,x)$.
(ii) Seien $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$. Wie in (i) erhalten wir für alle $s \in [t,T)$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[v(s\wedge\tau_n, \overline{X}(s\wedge\tau_n))] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \frac{\partial}{\partial t} v(r,\overline{X}(r)) + \mathcal{L}^{u(r,\overline{X}(r))} v(r,\overline{X}(r))\,dr\right],$$

wobei τ_n gegeben ist durch (3.12) bezüglich $(\overline{X}(s))_{s\in[t,T]}$. Nach Voraussetzung gilt für alle $s \in [t,T)$

$$\mathbb{E}[v(s\wedge\tau_n, \overline{X}(s\wedge\tau_n))] = v(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(r,\overline{X}(r),\overline{u}(r,\overline{X}(r)))\,dr\right].$$

Wieder schließen wir $v(t,x) = J(t,x,\overline{u}(\cdot,\overline{X}(\cdot))) \leq V(t,x)$. Mit (i) erhalten wir somit $v(t,x) = V(t,x)$. □

Bemerkung 3.6. *Die Kontrolle $\overline{u} = \overline{u}(\cdot,\overline{X}(\cdot)) \in U_t$ wird optimale Markov-Kontrolle genannt.*

Basierend auf den vorangegangen Satz werden Kontrollprobleme in 2 Schritten gelöst:

(1) Wir suchen das Supremum $\overline{u}(t,x)$ des Optimierungsproblems

$$\sup_{u\in U}\left[b'(t,x,u)D_x v(t,x) + \frac{1}{2}Tr[\sigma(t,x,u)\sigma'(t,x,u)D_x^2 v(t,x)] + f(t,x,u)\right].$$

(2) Nach Einsetzen des Supremums wird die Lösung der PDE

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}v(t,x) - \mathcal{L}^{\overline{u}(t,x)}v(t,x) - f(t,x,\overline{u}(t,x)) = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ermittelt.

3.4 Anwendungen

3.4.1 Portfoliooptimierung

Wir betrachten das Beispiel aus Abschnitt 1.1. Wir erinnern, dass der Vermögensprozess folgende SDE erfüllt:

$$dX(s) = ([r + (\mu - r)\pi(s)]X(s) - c(s))\,ds + \sigma\,\pi(s)X(s)\,dW(s)$$

und das Kostenfunktional

$$J(\pi,c) = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta s}h_1(c(s))\,ds + e^{-\delta T}h_2(X(T))\right]$$

zu maximieren ist.

Zunächst wollen wir die HJB Gleichung aufstellen. Dazu nehmen wir an, dass $(X(s))_{s\in[t,T]}$ der zugehörige Vermögensprozess mit Startkapital $X(t) = x > 0$ ist. Wir setzen $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{W(r) : t \leq r \leq s\}$ ergänzt mit allen $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$. Die nichtleere Menge der zulässigen Kontrollen $\Pi_t \times C_t$ umfasst alle $\mathcal{F}_s^t$-adaptierten Prozesse $(\pi(s), c(s))_{s\in[t,T]}$ mit Werten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T |\pi(s)|^2 ds + \int_t^T |c(s)| ds\right] < \infty.$$