Dann ist die Wertefunktion durch

$$V(t,x) = \sup_{(\pi,c)\in\Pi_t\times C_t} \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\delta s} h_1(c(s))\,ds + e^{-\delta T} h_2(X(T))\right]$$

gegeben und die HJB Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) \\ &- \sup_{(\pi,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}} \left[([r+(\mu-r)\pi]x - c)\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x) + e^{-\delta t} h_1(c)\right] \end{aligned}$$

für $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_{>0}$ mit der Randbedingung

$$v(T,x) = e^{-\delta T} h_2(x)$$

für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Schritt 1: Wir berechnen das Supremum in der HJB Gleichung. Dazu nehmen wir an, dass $v(t,\cdot)\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ für alle $t \in [0,T)$ konkav ist. Somit ergeben sich aus der Optimalitätsbedingung erster Ordnung

$$\overline{\pi} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)}, \tag{3.13}$$

$$\overline{c} = \left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1} \left(e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right), \tag{3.14}$$

wobei $\left[\frac{d}{dx}h_1\right]^{-1}$ die Umkehrfunktion der Ableitung von h_1 bezeichnet.

Schritt 2: Durch einsetzen erhalten wir die PDE

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - \left(r\,x - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} - \left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1}\left(e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right)^2}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} - e^{-\delta t} h_1\left(\left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1}\left(e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right)\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - \left(r\,x - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} - \left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1}\left(e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \\ &\quad - e^{-\delta t} h_1\left(\left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1}\left(e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right)\right), \end{aligned} \tag{3.15}$$

welche unter Berücksichtigung der Randbedingung gelöst werden muss.

Bemerkung 3.7. *Beachte, dass für die Resultate in den vorangegangenen Abschnitten die Annahme der Konkavität der Funktion $v(t,\cdot)$ nicht notwendig war. In der Praxis ist diese zusätzlich Annahme oft hilfreich, damit das Supremum in der HJB Gleichung endlich ist und angenommen wird.*

Beispiel 3.8. *Wir betrachten den Spezialfall* $h_i(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma$ *für* $i = 1, 2$ *mit* $\gamma \in (0, 1)$. *Dann vereinfacht sich Gleichung (3.15) zu*

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - \left(r\,x - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} - \left(e^{\delta t} \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \right) \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} e^{-\delta t} \left(e^{\delta t} \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - \left(r\,x - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} \right) \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \\ &\quad - \frac{1 - \gamma}{\gamma} e^{\frac{\delta t}{\gamma - 1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \end{aligned}$$

welche wir mit der Endbedingung $v(T, x) = e^{-\delta T} \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ *ausstatten. Also nächstes formulieren wir die PDE in eine ODE um. Dafür wählen wir den Ansatz*

$$v(t,x) = e^{-\delta t} z(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma$$

mit einer Funktion $z \colon [0, T] \to \mathbb{R}$. *Durch einsetzen folgt*

$$0 = -e^{-\delta t} \frac{1}{\gamma} x^\gamma \left[\frac{d}{dt} z(t) - z(t) \left(\frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} - r\gamma + \delta \right) - (\gamma - 1)(z(t))^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right]$$

mit der Endbedingung $z(T) = 1$. *Dies lässt sich durch*

$$\frac{d}{dt} z(t) = a_1 z(t) + a_2 (z(t))^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \qquad z(T) = 1$$

formulieren, wobei $a_1 = \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} - r\gamma + \delta$ *und* $a_2 = \gamma - 1$. *Als nächstes setzen wir* $\psi(t) = (z(t))^{\frac{1}{1-\gamma}}$ *für alle* $t \in [0, T]$. *Somit erhalten wir die lineare ODE*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) &= \frac{1}{1 - \gamma} (z(t))^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{d}{dt} z(t) \\ &= a_1 \frac{1}{1 - \gamma} (z(t))^{\frac{1}{1-\gamma}} + a_2 \frac{1}{1 - \gamma} \\ &= a_1 \frac{1}{1 - \gamma} \psi(t) - 1 \end{aligned}$$

mit der Endbedingung $\psi(T) = 1$. *Diese Gleichung besitzt die eindeutige Lösung*

$$\psi(t) = \exp\left\{ -\frac{a_1}{1 - \gamma} (T - t) \right\} \left(1 - \frac{1 - \gamma}{a_1} \right) + \frac{1 - \gamma}{a_1}.$$

Wir erhalten

$$v(t,x) = e^{-\delta t} \left[\exp\left\{ -\frac{a_1}{1 - \gamma} (T - t) \right\} \left(1 - \frac{1 - \gamma}{a_1} \right) + \frac{1 - \gamma}{a_1} \right]^{1-\gamma} \frac{1}{\gamma} x^\gamma.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.13) *und* (3.14) *haben wir*

$$\overline{\pi}(t,x) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)}{x \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x)} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{\gamma - 1},$$

$$\overline{c}(t,x) = \left[\frac{d}{dx} h_1\right]^{-1} \left(e^{\delta t} \frac{\partial}{\partial x} v(t,x)\right) = (z(t))^{\frac{1}{\gamma-1}} x.$$

Nach dem Verifikationssatz (Satz 3.5) ist die Kontrolle $(\overline{\pi}(s, \overline{X}(s)), \overline{c}(s, \overline{X}(s)))_{s\in[t,T]}$ *optimal und* $V(t,x) = v(t,x)$*. Insbesondere erfüllt der optimale Vermögensprozess* $(\overline{X}(s))_{s\in[t,T]}$ *die SDE*

$$\begin{cases} d\overline{X}(s) = \left(\left[r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\gamma - 1} - (z(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] \overline{X}(s)\right) ds - \frac{\mu - r}{\sigma} \frac{1}{\gamma - 1} \overline{X}(s)\, dW(s), \\ \overline{X}(t) = x. \end{cases}$$

3.4.2 Linear quadratische stochastische Kontrollprobleme

Wir betrachten das Beispiel aus Abschnitt 1.2

Allgemeine Formulierung Für $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir die folgende lineare (inhomogene) SDE

$$\begin{cases} dX(s) = [A(s)X(s) + B(s)u(s) + b(s)]\, ds \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{d} [C_j(s)X(s) + D_j(s)u(s) + \sigma_j(s)]\, dW_j(s), \quad s \in [t,T] \\ X(t) = x. \end{cases} \tag{3.16}$$

Die nichtleere Menge der zulässigen Kontrollen U_t umfasst alle $\mathcal{F}_t$-adaptierten Prozesse $(u(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$, so dass

$$\mathbb{E} \int_t^T \|u(s)\|_m^2 ds < \infty.$$

Zusätzlich sei die Ertragsfunktion $J\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_t \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} J(t,x,u) = \mathbb{E} \Bigg[\frac{1}{2} \int_t^T & \langle Q(s)X(s), X(s)\rangle_n + 2\langle S(s)X(s), u(s)\rangle_m + \langle R(s)u(s), u(s)\rangle_m\, ds \\ & + \frac{1}{2} \langle GX(T), X(T)\rangle_n \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wir treffen folgende Annahmen:

(L1) Wir nehmen an die Funktionen genügen:

- $A, C_j \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^{n\times n})$ und $B, D_j \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^{n\times m})$ für $j = 1, ..., d$;
- $b, \sigma_j \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ für $j = 1, ..., d$;
- $Q \in L^\infty([0,T];\mathbb{S}^n)$, $S \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^{m\times n})$, $R \in L^\infty([0,T];\mathbb{S}^m)$ und $G \in \mathbb{S}^n$.

Aus den obigen Annahmen können wir analog zu Satz 2.1 schließen, dass die SDE (3.16) eine eindeutige Lösung $(X(s))_{s\in[t,T]}$ besitzt. Weiterhin ist die Ertragsfunktion (3.17) wohldefiniert ist.

Ziel: Für jedes $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ finde $\overline{u} \in U_t$, so dass

$$J(t,x,\overline{u}) = \inf_{u\in U_t} J(t,x,u).$$

Die Wertefunktion $J\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist somit

$$V(t,x) = \sup_{u\in U_t} -J(t,x,u).$$

Beachte, dass $V(T,x) = -\frac{1}{2}\left\langle Gx, x\right\rangle_n$.

Herleitung der optimalen Kontrolle Wir nehmen an, dass die Annahme **(L1)** gilt. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $d = 1$, d.h. in der SDE (3.16) geht ein reelwertigen Wiener Prozess ein. Wir stellen zunächst wieder die HJB Gleichung auf:

$$\begin{aligned}
0 = &-\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) \\
&- \sup_{u\in\mathbb{R}^m} \Big[\left\langle A(t)x + B(t)u + b(t), D_x v(t,x)\right\rangle_n \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\langle C(t)x + D(t)u + \sigma(t), D_x^2 v(t,x)[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]\right\rangle_n \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left\langle Q(t)x, x\right\rangle_n - \left\langle S(t)x, u\right\rangle_m - \frac{1}{2}\left\langle R(t)u, u\right\rangle_m\Big],
\end{aligned}$$

welche wir mit der Endbedingung $v(T,x) = -\frac{1}{2}\left\langle Gx, x\right\rangle_n$ ausstatten. Um die Lösung der Gleichung anzugeben, wählen wir den Ansatz

$$v(t,x) = -\frac{1}{2}\left\langle P(t)x, x\right\rangle_n - \left\langle \varphi(t), x\right\rangle_n - f(t)$$

mit Funktionen $P\colon [0,T] \to \mathbb{S}^{n\times n}$, $\varphi\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ und $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass

$$P(T) = G, \quad \varphi(T) = 0, \quad f(T) = 0.$$

Durch Einsetzen und quadratische Vervollständigung erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\left\langle \dot{P}(t)x, x \right\rangle_n + \langle \dot{\varphi}(t), x\rangle_n + \dot{f}(t) \\
&\quad - \sup_{u\in\mathbb{R}^m} \Big[- \langle A(t)x + B(t)u + b(t), P(t)x + \varphi(t)\rangle_n \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\langle C(t)x + D(t)u + \sigma(t), P(t)[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]\rangle_n \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\langle Q(t)x, x\rangle_n - \langle S(t)x, u\rangle_m - \frac{1}{2}\langle R(t)u, u\rangle_m \Big] \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \dot{P}(t)x, x \right\rangle_n + \langle \dot{\varphi}(t), x\rangle_n + \dot{f}(t) \\
&\quad - \sup_{u\in\mathbb{R}^m} \Big[-\frac{1}{2}\left\| \hat{R}^{1/2}(t)[u + \Psi(t)x + \psi(t)]\right\|_n^2 + \frac{1}{2}\left\langle \hat{S}'(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t)x, x\right\rangle_n \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\langle [P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t)]x, x\rangle_n \\
&\qquad\qquad - \left\langle A'(t)\varphi(t) + C'(t)P(t)\sigma(t) - \Psi'(t)\hat{R}(t)\psi(t) + P(t)b(t), x\right\rangle_n \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\left\|\hat{R}^{1/2}(t)\psi(t)\right\|_n^2 - \langle \psi(t), b(t)\rangle_n - \frac{1}{2}\langle P(t)\sigma(t), \sigma(t)\rangle_n \Big],
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{R}(t) &= R(t) + D'(t)P(t)D(t), \quad \hat{S}(t) = B'(t)P(t) + S(t) + D'(t)P(t)C(t), \\
\Psi(t) &= \hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t), \quad \psi(t) = \hat{R}^{-1}(t)[B'(t)\varphi(t) + D'(t)P(t)\sigma(t)].
\end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir an $R(t) + D'(t)P(t)D(t) > 0$, so dass $\hat{R}^{-1}(t)$ wohldefiniert ist. Somit wird das Supremum an der Stelle

$$\overline{u}(t,x) = -\Psi(t)x - \psi(t)$$

angenommen. Mittels Einsetzen haben wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle \dot{P}(t)x, x \right\rangle_n + \langle \dot{\varphi}(t), x\rangle_n + \dot{f}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \hat{S}'(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t)x, x\right\rangle_n \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle [P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t)]x, x\rangle_n \\
&\quad - \left\langle A'(t)\varphi(t) + C'(t)P(t)\sigma(t) - \Psi'(t)\hat{R}(t)\psi(t) + P(t)b(t), x\right\rangle_n \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\|\hat{R}^{1/2}(t)\psi(t)\right\|_n^2 - \langle \psi(t), b(t)\rangle_n - \frac{1}{2}\langle P(t)\sigma(t), \sigma(t)\rangle_n
\end{aligned}$$

Durch ein Vergleich der Terme erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t) \\ - \hat{S}'(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t) = 0, \quad t \in [0,T) \\ P(T) = G, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) + [A(t) - B(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t)]'\varphi(t) \\ \quad + [C(t) - D(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t)]'P(t)\sigma(t) + P(t)b(t) = 0, \quad t \in [0,T) \\ \varphi(T) = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} \dot{f}(t) - \frac{1}{2}\left\|\hat{R}^{1/2}(t)\psi(t)\right\|_n^2 + \langle\psi(t), b(t)\rangle_n + \frac{1}{2}\langle P(t)\sigma(t), \sigma(t)\rangle_n = 0, \quad t \in [0,T) \\ f(T) = 0, \end{cases}$$

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} v(t,x) = &-\frac{1}{2}\langle P(t)x, x\rangle_n - \langle\varphi(t), x\rangle_n \\ &- \frac{1}{2}\int_t^T \left\|\hat{R}^{1/2}(s)\psi(s)\right\|_n^2 - 2\langle\psi(s), b(s)\rangle_n - \langle P(s)\sigma(s), \sigma(s)\rangle_n \, ds. \end{aligned}$$

Nach dem Verifikationssatz (Satz 3.5) ist die Kontrolle $(\overline{u}(s, \overline{X}(s)))_{s\in[t,T]}$ optimal und $V(t,x) = v(t,x)$. Insbesondere erfüllt der optimale Zustand $(\overline{X}(s))_{s\in[t,T]}$ die SDE

$$\begin{cases} d\overline{X}(s) = [\{A(s) - B(s)\Psi(s)\}\overline{X}(s) - B(s)\psi(s) + b(s)]\, ds \\ \qquad\qquad + [\{C(s) - D(s)\Psi(s)\}\overline{X}(s) - D(s)\psi(s) + \sigma(s)]\, dW(s), \\ \overline{X}(t) = x. \end{cases}$$

Bemerkung 3.9. *(i) Die nichtlineare Matrix-Differentialgleichung* (3.18) *ist die sogenannte (stochastische) Riccati-Gleichung und spielt eine wichtige Rolle für linear quadratische stochastische Kontrollprobleme.*

(ii) Wir erkennen, dass linear quadratische stochastische Kontrollprobleme gelöst werden indem man die Lösungen der deterministischen Gleichungen (3.18) *und* (3.19) *ermittelt.*

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Riccati-Gleichung Wir haben gesehen, dass die Lösung eines linear quadratischen stochastischen Kontrollproblems auf der Lösung der zugehörigen Riccati-Gleichung basiert. Hier geben wir Voraussetzungen an, unter dem die Gleichung (3.18) als auch die Gleichung (3.19) eine eindeutige Lösung besitzt. Zusätzlich zu der Annahme **(L1)** mit $d = 1$ gelte

(L2) Die Funktionen genügen
- $D \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n\times m})$, $R \in C([0,T]; \mathbb{S}^m)$;
- $R(t) > 0$, $Q(t) - S(t)R^{-1}(t)S'(t) \geq 0$, $G \geq 0$.

Idee des Beweises ist ein Iterationsschema aufzustellen, welches die Riccati-Gleichung (3.18) linearisiert. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Hilfsresultat an.

Lemma 3.10. *Seien $\hat{A}, \hat{C}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{Q}\colon [0,T] \to \mathbb{S}^n$ und $G \in \mathbb{S}^n$ messbar und gleichmäßig beschränkt. Dann hat die lineare Matrix-Differentialgleichung*

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)\hat{A}(t) + \hat{A}'(t)P(t) + \hat{C}'(t)P(t)\hat{C}(t) + \hat{Q}(t) = 0, \quad t \in [0,T) \\ P(T) = \hat{G} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $P \in C([0,T];\mathbb{S}^n)$. Gilt zusätzlich $\hat{Q}(t) \geq 0$ und $\hat{G} \geq 0$, dann haben wir $P(t) \geq 0$.

Beweis. Siehe [Young and Zhou, Chapter 6, Lemma 7.3]. □

Satz 3.11. *Seien **(L1)** mit $d = 1$ und **(L2)** erfüllt. Dann besitzt die Gleichung* (3.18) *eine eindeutige Lösung $P \in C([0,T];\mathbb{S}^n)$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass (3.18) äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)\hat{A}(t) + \hat{A}'(t)P(t) + \hat{C}'(t)P(t)\hat{C}(t) + \hat{Q}(t) = 0, \quad t \in [0,T) \\ P(T) = G \end{cases} \tag{3.20}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) = A(t) - B(t)\Sigma(t), \quad \hat{C}(t) = C(t) - D(t)\Sigma(t) \\ \hat{Q}(t) = [\Sigma(t) - R^{-1}(t)S(t)]'R(t)[\Sigma(t) - R^{-1}(t)S(t)] + Q(t) - S'(t)R^{-1}(t)S(t) \\ \Sigma(t) = [R(t) + D'(t)P(t)D(t)]^{-1}[B'(t)P(t) + S(t) + D'(t)P(t)C(t)]. \end{aligned}$$

Beachte, dass

$$[R(t) + D'(t)P(t)D(t)]\Sigma(t) = B'(t)P(t) + S(t) + D'(t)P(t)C(t)$$

gilt und somit haben wir

$$\begin{aligned} &\Sigma'(t)R(t)\Sigma(t) - S'(t)\Sigma(t) \\ &= [\Sigma'(t)[R(t) + D'(t)P(t)D(t)] - S'(t) - \Sigma'(t)D'(t)P(t)D(t)]\Sigma(t) \\ &= [P(t)B(t) + C'(t)P(t)D(t) - \Sigma'(t)D'(t)P(t)D(t)]\Sigma(t). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\hat{Q}(t) = \Sigma'(t)R(t)\Sigma(t) - S'(t)\Sigma(t) - \Sigma'(t)S(t) + Q(t).$$

Aus Gleichung (3.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= P(t)[A(t) - B(t)\Sigma(t)] + [A(t) - B(t)\Sigma(t)]'P(t) \\ &\quad + [C(t) - D(t)\Sigma(t)]'P(t)[C(t) - D(t)\Sigma(t)] \\ &\quad + \Sigma'(t)R(t)\Sigma(t) - S'(t)\Sigma(t) - \Sigma'(t)S(t) + Q(t) \\ &= P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t) \\ &\quad - \Sigma'(t)B'(t)P(t) - \Sigma'(t)D'(t)P(t)C(t) - \Sigma'(t)S(t) \\ &= P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t) \\ &\quad - \Sigma'(t)[R(t) + D'(t)P(t)D(t)]\Sigma(t) \\ &= P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + Q(t) - \hat{S}'(t)\hat{R}^{-1}(t)\hat{S}(t). \end{aligned}$$

Da wir ausschließlich äquivalente Umformungen verwendet haben erhalten wir sofort die Rückrichtung.

Als nächstes führen wir folgendes Iterationsschema für $k = 0, 1, 2, ...$ ein:

$$\begin{cases} \dot{P}_{k+1}(t) + P_{k+1}(t)\hat{A}_k(t) + \hat{A}_k'(t)P_{k+1}(t) \\ \quad + \hat{C}_k'(t)P_{k+1}(t)\hat{C}_k(t) + \hat{Q}_k(t) = 0, \quad t \in [0, T) \\ P_{k+1}(T) = G, \end{cases} \tag{3.21}$$

wobei

$$\begin{gathered} P_0(t) = G, \quad \hat{A}_k(t) = A(t) - B(t)\Sigma_k(t), \quad \hat{C}_k(t) = C(t) - D(t)\Sigma_k(t), \\ \hat{Q}_k(t) = [\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)]'R(t)[\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)] + Q(t) - S'(t)R^{-1}(t)S(t), \\ \Sigma_k(t) = [R(t) + D'(t)P_k(t)D(t)]^{-1}[B'(t)P_k(t) + S(t) + D'(t)P_k(t)C(t)]. \end{gathered}$$

Unter Anwendung von Lemma 3.10 hat die Gleichung (3.21) eine eindeutige Lösung $P_{k+1} \in C([0, T]; \mathbb{S}^n)$ mit $P_{k+1}(t) \geq 0$. Wir zeigen, dass $P_{k+1}(t) \geq P_k(t)$ gilt. Dazu setzen wir $\Delta_k(t) = P_k(t) - P_{k+1}(t)$ und $\Gamma_k(t) = \Sigma_k(t) - \Sigma_{k-1}(t)$. Aus Gleichung (3.21) folgt

$$\begin{aligned} -\dot{\Delta}_k(t) = \Delta_k(t)\hat{A}_k(t) &+ \hat{A}_k'(t)\Delta_k(t) + \hat{C}_k'(t)\Delta_k(t)\hat{C}_k(t) + P_k(t)\left[\hat{A}_{k-1}(t) - \hat{A}_k(t)\right] \\ &+ \left[\hat{A}_{k-1}(t) - \hat{A}_k(t)\right]' P_k(t) + \hat{C}_{k-1}'(t)P_k(t)\hat{C}_{k-1}(t) \\ &- \hat{C}_k'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t) + \hat{Q}_{k-1}(t) - \hat{Q}_k(t). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} &\hat{A}_{k-1}(t) - \hat{A}_k(t) = -B(t)\Gamma_k(t), \quad \hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k(t) = -D(t)\Gamma_k(t), \\ &\hat{C}_{k-1}'(t)P_k(t)\hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t) \\ &= [\hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k(t)]'P_k(t)[\hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k(t)] + \hat{C}_k'(t)P_k(t)[\hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k(t)] \\ &\quad + [\hat{C}_{k-1}(t) - \hat{C}_k(t)]'P_k(t)\hat{C}_k(t) \\ &= \Gamma_k'(t)D'(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t) - \hat{C}_k'(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t) - \Gamma_k'(t)D'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t), \\ &\hat{Q}_{k-1}(t) - \hat{Q}_k(t) \\ &= \Gamma_k'(t)R(t)\Gamma_k(t) + [\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)]'R(t)\Gamma_k(t) + \Gamma_k'(t)R(t)[\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)]. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&-\dot{\Delta}_k(t)-\Delta_k(t)\hat{A}_k(t)-\hat{A}_k'(t)\Delta_k(t)-\hat{C}_k'(t)\Delta_k(t)\hat{C}_k(t)\\
&=-P_k(t)B(t)\Gamma_k(t)-\Gamma_k'(t)B'(t)P_k(t)+\Gamma_k'(t)D'(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t)\\
&\quad-\hat{C}_k'(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t)-\Gamma_k'(t)D'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t)+\Gamma_k'(t)R(t)\Gamma_k(t)\\
&\quad+[\Sigma_k(t)-R^{-1}(t)S(t)]'R(t)\Gamma_k(t)+\Gamma_k'(t)R(t)[\Sigma_k(t)-R^{-1}(t)S(t)]\\
&=\Gamma_k'(t)[R(t)+D'(t)P_k(t)D(t)]\Gamma_k(t)\\
&\quad-\Gamma_k'(t)[B'(t)P_k(t)+D'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t)-R(t)\Sigma_k(t)+S(t)]\\
&\quad-[P_k(t)B(t)+\hat{C}_k'(t)P_k(t)D(t)-\Sigma_k'(t)R(t)+S'(t)]\Gamma_k(t)\\
&=\Gamma_k'(t)[R(t)+D'(t)P_k(t)D(t)]\Gamma_k(t)\geq 0.
\end{aligned}
$$

Da $\Delta_k(T)=0$, können wir Lemma 3.10 anwenden und es gilt insbesondere $\Delta_k(t)\geq 0$. Somit ist $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $C([0,T];\mathbb{S}^n)$ ausgestattet mit der Maximumsnorm und es existiert ein eindeutiges Element $P\in C([0,T];\mathbb{S}^n)$, so dass $P_k\to P$ für $k\to\infty$. Unter Verwendung der Gleichung (3.21) erfüllt P die Gleichung (3.20) und somit auch die Riccati-Gleichung (3.18). □

Bemerkung 3.12. *Das Schema* (3.21) *gibt uns einen numerischen Algorithmus, um die Lösung der Riccati-Gleichung* (3.18) *zu ermitteln. Man kann zeigen, dass wir folgende Konvergenzrate für $k=2,3,...$ haben:*

$$\|P_k(t)-P(t)\|_{n\times n}\leq K\sum_{j=k}^{\infty}\frac{c^{j-2}}{(j-2)!}(T-t)^{j-2},$$

wobei die Konstanten $K,c>0$ nur von den Koeffizienten in (3.18) *abhängen.*

4 Viskositätslösung der HJB Gleichung

Selbst in einfachen Beispielen kann es schwierig werden eine Lösung der HJB zu finden, welche hinreichend glatt ist. Aus diesem Grund führen wir hier das schwächere Lösungskonzept von Viskositätslösungen für PDEs ein. Wir zeigen, dass die Wertefunktion eine Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Anhand des Beispiels aus Abschnitt 1.3 präsentieren wir die Anwendung des Konzeptes.

4.1 Einführung

Sei $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge und $F\colon\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten folgende PDE zweiter Ordnung:

$$F(x,w(x),Dw(x),D^2w(x))=0. \tag{4.1}$$

Annahme: (elliptisch) Für alle $(x,r,p)\in\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ und alle $M,\widetilde{M}\in\mathbb{S}^N$ gelte

$$M\leq\widetilde{M}\quad\Rightarrow\quad F(x,r,p,M)\geq F(x,r,p,\widetilde{M}).$$