

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& -\dot{\Delta}_k(t) - \Delta_k(t)\hat{A}_k(t) - \hat{A}'_k(t)\Delta_k(t) - \hat{C}'_k(t)\Delta_k(t)\hat{C}_k(t) \\
& = -P_k(t)B(t)\Gamma_k(t) - \Gamma'_k(t)B'(t)P_k(t) + \Gamma'_k(t)D'(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t) \\
& \quad - \hat{C}'_k(t)P_k(t)D(t)\Gamma_k(t) - \Gamma'_k(t)D'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t) + \Gamma'_k(t)R(t)\Gamma_k(t) \\
& \quad + [\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)]'R(t)\Gamma_k(t) + \Gamma'_k(t)R(t)[\Sigma_k(t) - R^{-1}(t)S(t)] \\
& = \Gamma'_k(t)[R(t) + D'(t)P_k(t)D(t)]\Gamma_k(t) \\
& \quad - \Gamma'_k(t)[B'(t)P_k(t) + D'(t)P_k(t)\hat{C}_k(t) - R(t)\Sigma_k(t) + S(t)] \\
& \quad - [P_k(t)B(t) + \hat{C}'_k(t)P_k(t)D(t) - \Sigma'_k(t)R(t) + S'(t)]\Gamma_k(t) \\
& = \Gamma'_k(t)[R(t) + D'(t)P_k(t)D(t)]\Gamma_k(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Da  $\Delta_k(T) = 0$ , können wir Lemma 3.10 anwenden und es gilt insbesondere  $\Delta_k(t) \geq 0$ . Somit ist  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge in  $C([0, T]; \mathbb{S}^n)$  ausgestattet mit der Maximumsnorm und es existiert ein eindeutiges Element  $P \in C([0, T]; \mathbb{S}^n)$ , so dass  $P_k \rightarrow P$  für  $k \rightarrow \infty$ . Unter Verwendung der Gleichung (3.21) erfüllt  $P$  die Gleichung (3.20) und somit auch die Riccati-Gleichung (3.18).  $\square$

**Bemerkung 3.12.** *Das Schema (3.21) gibt uns einen numerischen Algorithmus, um die Lösung der Riccati-Gleichung (3.18) zu ermitteln. Man kann zeigen, dass wir folgende Konvergenzrate für  $k = 2, 3, \dots$  haben:*

$$\|P_k(t) - P(t)\|_{n \times n} \leq K \sum_{j=k}^{\infty} \frac{c^{j-2}}{(j-2)!} (T-t)^{j-2},$$

wobei die Konstanten  $K, c > 0$  nur von den Koeffizienten in (3.18) abhängen.

## 4 Viskositätslösung der HJB Gleichung

Selbst in einfachen Beispielen kann es schwierig werden eine Lösung der HJB zu finden, welche hinreichend glatt ist. Aus diesem Grund führen wir hier das schwächere Lösungskonzept von Viskositätslösungen für PDEs ein. Wir zeigen, dass die Wertefunktion eine Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Anhand des Beispiels aus Abschnitt 1.3 präsentieren wir die Anwendung des Konzeptes.

### 4.1 Einführung

Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $F: \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir betrachten folgende PDE zweiter Ordnung:

$$F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) = 0. \quad (4.1)$$

**Annahme:** (elliptisch) Für alle  $(x, r, p) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  und alle  $M, \widetilde{M} \in \mathbb{S}^N$  gelte

$$M \leq \widetilde{M} \quad \Rightarrow \quad F(x, r, p, M) \geq F(x, r, p, \widetilde{M}).$$

Damit erhalten wir folgendes Resultat.

**Satz 4.1.** Sei  $w \in C^2(\mathcal{O})$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktion  $w$  ist eine klassische Sublösung (bzw. Superlösung) von (4.1), d.h.

$$F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) \leq 0, \quad (\text{bzw. } \geq)$$

für alle  $x \in \mathcal{O}$  erfüllt.

(ii) Für alle  $x \in \mathcal{O}$  sei  $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ , so dass  $w - \varphi$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in  $x$  hat. Dann gilt

$$F(x, w(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0. \quad (\text{bzw. } \geq)$$

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage lediglich für den Fall einer Sublösung.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Seien  $x \in \mathcal{O}$  und  $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ , so dass  $w - \varphi$  ein lokales Maximum in  $x$  hat. Aus den Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} D(w - \varphi)(x) = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad Dw(x) = D\varphi(x), \\ D^2(w - \varphi)(x) \leq 0 & \quad \Leftrightarrow \quad D^2w(x) \leq D^2\varphi(x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$F(x, w(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) \leq 0.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Wähle  $\varphi = w$ . □

Um sicherzustellen, dass  $w - \varphi$  im vorhergehenden Satz ein lokales Maximum (bzw. Minimum) annimmt, ist das Konzept der Halbstetigkeit nötig.

**Definition 4.2.** Eine Funktion  $w: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- oberhalbstetig, falls für alle  $x \in \mathcal{O}$

$$w(x) \geq \limsup_{y \rightarrow x} w(y);$$

- unterhalbstetig, falls für alle  $x \in \mathcal{O}$

$$w(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} w(y).$$

Da nicht jede Funktion oberhalbstetig (bzw. unten) ist, führen wir die halbstetige Umhüllung ein.

**Definition 4.3.** Sei  $w: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal beschränkt.

- Die Funktion  $w^*: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$

$$w^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} w(y)$$

nennen wir oberhalbstetige Umhüllung von  $w$ .

- Die Funktion  $w_*: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$

$$w_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} w(y)$$

nennen wir unterhalbstetige Umhüllung von  $w$ .

**Bemerkung 4.4.** • Aus der lokalen Beschränktheit von  $w$  folgt die Existenz von Limes superior und Limes inferior.

- Die von oben (bzw. unten) halbstetige Funktion  $w^*$  (bzw.  $w_*$ ) ist die kleinste (bzw. größte) Funktion größer (bzw. kleiner) als  $w$  auf  $\mathcal{O}$ .
- Eine lokal beschränkte Funktion  $w$  ist genau dann oberhalbstetig (bzw. unten), wenn  $w = w^*$  (bzw.  $w = w_*$ ).

**Definition 4.5.** Sei  $w: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal beschränkt.

- Die Funktion  $w$  ist eine Sublösung von (4.1) im Viskositätssinne, falls für alle  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  und alle  $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$

$$F(\bar{x}, w^*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \leq 0$$

und  $\bar{x}$  ist ein lokales Maximum von  $w^* - \varphi$ .

- Die Funktion  $w$  ist eine Superlösung von (4.1) im Viskositätssinne, falls für alle  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  und alle  $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$

$$F(\bar{x}, w^*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \geq 0$$

und  $\bar{x}$  ist ein lokales Minimum von  $w^* - \varphi$ .

- Die Funktion  $w$  ist eine Viskositätslösung von (4.1), falls  $w$  sowohl eine Sub- als auch Superlösung von (4.1) im Viskositätssinne ist.

Für zeitabhängige Probleme setzen wir  $\mathcal{O} = [0, T) \times \mathcal{O}_n$ , wobei  $\mathcal{O}_n \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge ist. Wir führen eine stetige Funktion  $F: [0, T) \times \mathcal{O}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}$  und betrachten die PDE zweiter Ordnung

$$F(t, x, w(t, x), D_t w(t, x), D_x w(t, x), D_x^2 w(t, x)) = 0. \quad (4.2)$$

**Annahme:**

- (elliptisch) Für alle  $(t, x, r, q, p) \in [0, T) \times \mathcal{O}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und alle  $M, \widetilde{M} \in \mathbb{S}^n$  gelte

$$M \leq \widetilde{M} \quad \Rightarrow \quad F(t, x, r, q, p, M) \geq F(t, x, r, q, p, \widetilde{M}). \quad (4.3)$$

- (paraboloisch) Für alle  $(t, x, r, p, M) \in [0, T] \times \mathcal{O}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$  und alle  $q, \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$  gelte

$$q \leq \tilde{q} \quad \Rightarrow \quad F(x, r, q, p, M) \geq F(x, r, \tilde{q}, p, M). \quad (4.4)$$

**Korollar 4.6.** Sei  $w \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O}_n)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die Funktion  $w$  ist eine klassische Sublösung (bzw. Superlösung) von (4.2).
- (ii) Für alle  $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{O}_n$  sei  $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O}_n)$ , so dass  $w - \varphi$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in  $(t, x)$  hat. Dann gilt

$$F(t, x, w(t, x), D_t \varphi(t, x), D_x \varphi(t, x), D_x^2 \varphi(t, x)) \leq 0. \quad (\text{bzw. } \geq)$$

*Beweis.* Der Beweis kann analog zu Satz 4.1 geführt werden.  $\square$

Somit ist es sinnvoll Viskositätslösungen von PDEs der Form (4.2) analog der Definition 4.5 zu erweitern. Beachte, dass insbesondere für  $w \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O}_n)$  die klassische Lösung äquivalent zur Viskositätslösung ist.

## 4.2 Die Wertefunktion als Viskositätslösung der HJB Gleichung

Wir kehren zum stochastischen Kontrollproblem formuliert in Kapitel 2 zurück.

**Wiederholung aus Kapitel 3:** Die Wertefunktion ist nach (3.3) gegeben durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^T f(s, X(s), u(s)) ds + g(X(T)) \right].$$

Falls  $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ , dann erfüllt die Wertefunktion nach Satz 3.3 die PDE

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) - H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ V(T, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit  $H: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$H(t, x, p, M) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left[ b'(t, x, u)p + \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)M] + f(t, x, u) \right].$$

Umgekehrt entspricht nach Satz 3.5 die Lösung der PDE

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) - H(t, x, D_x v(t, x), D_x^2 v(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ v(T, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

der Wertefunktion.

Bemerke, dass wir hierfür hinreichende Glattheit an die Funktionen vorausgesetzt haben. Wir werden unter Verwendung der Viskositätslösung diese Voraussetzung abschwächen. Wir zeigen zunächst, dass die Annahmen (4.3) und (4.4) erfüllt sind. Beachte, dass die Annahme (4.4) trivialerweise gilt.

**Lemma 4.7.** *Für alle  $(t, x, p) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  und alle  $M, \widetilde{M} \in \mathbb{S}^n$  gilt*

$$M \leq \widetilde{M} \quad \Rightarrow \quad H(t, x, p, M) \leq H(t, x, p, \widetilde{M}).$$

*Beweis.* Seien  $(t, x, p) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  und  $u \in U$ . Weiterhin seien  $M, \widetilde{M} \in \mathbb{S}^n$  mit  $M \leq \widetilde{M}$ , d.h.  $A = \widetilde{M} - M$  ist positiv semidefinit. Damit existiert eine positiv semidefinite Matrix  $A^{1/2} \in \mathbb{S}^n$ , so dass  $A = A^{1/2}A^{1/2}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} & Tr[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)\widetilde{M}] - Tr[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)M] \\ &= Tr[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)A] \\ &= Tr[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)A^{1/2}A^{1/2}] \\ &= Tr[A^{1/2}\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)A^{1/2}] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass  $A^{1/2}\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)A^{1/2}$  positiv semidefinit ist. Daher folgt die Behauptung.  $\square$

Wir nehmen an, dass die Wertefunktion  $V$  lokal beschränkt auf  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ . Damit können wir schließen, dass analog zu Definition 4.3 die unter- und oberhalbstetige Umhüllung  $V_*, V^* : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert sind. Es folgt, dass das schwache Prinzip der dynamischen Programmierung hält, d.h. es gilt für alle  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$  und eine Stoppzeit  $\tau$  mit Werten in  $[t, T]$

$$V(t, x) \geq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau f(s, X(s), u(s)) ds + V_*(\tau, X(\tau)) \right], \quad (4.5)$$

$$V(t, x) \leq \sup_{u \in U_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau f(s, X(s), u(s)) ds + V^*(\tau, X(\tau)) \right]. \quad (4.6)$$

**Satz 4.8.** *Sei  $H$  oberhalbstetig. Dann ist die Wertefunktion  $V$  die Viskositätslösung der Gleichung*

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t, x) - H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n. \quad (4.7)$$

*Beweis. Schritt 1:* Wir zeigen, dass  $V$  eine Superlösung von (4.7) im Viskositätssinne ist. Seien  $(t, x) \in Q = [0, T) \times \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in C^2(Q)$  mit  $\varphi \leq V_*$  auf  $Q$ , so dass

$$\varphi(t, x) = V_*(t, x).$$

Weiterhin seien  $(t_k, x_k) \in Q$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(t_k, x_k) \rightarrow (t, x), \quad V(t_k, x_k) \rightarrow V_*(t, x)$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Wir definieren

$$\eta_k = V(t_k, x_k) - \varphi(t_k, x_k).$$

Beachte, dass  $\eta_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Sei  $(X_k(s))_{s \in [t_k, T]}$  die Lösung der SDE (3.1) mit Anfangsbedingung  $X_k(t_k) = x_k$  und konstanter Kontrolle  $u(s) = u$  für alle  $s \in [t_k, T]$ . Weiterhin führen wir die Stoppzeiten

$$\tau_k = \inf\{s > t_k : s - t_k \geq h_k \text{ oder } \|X_k(s) - x_k\|_n \geq R\}$$

ein, wobei  $R > 0$  und  $h_k = \sqrt{\eta_k} \mathbb{1}_{\{\eta_k \neq 0\}} + \frac{1}{k} \mathbb{1}_{\{\eta_k = 0\}}$ . Mit Ungleichung (4.5) aus dem schwachen Prinzip der dynamischen Programmierung folgt

$$0 \leq \mathbb{E} \left[ V(t_k, x_k) - V_*(\tau_k, X_k(\tau_k)) - \int_t^{\tau_k} f(s, X_k(s), u) ds \right]$$

und somit

$$0 \leq \eta_k + \mathbb{E} \left[ \varphi(t_k, x_k) - \varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) - \int_t^{\tau_k} f(s, X_k(s), u) ds \right].$$

Ferner erhalten wir mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} \varphi(t_k, x_k) - \varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) &= - \int_{t_k}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, X_k(s)) + \mathcal{L}^u \varphi(s, X_k(s)) ds \\ &\quad - \int_{t_k}^{\tau_k} [D_x \varphi(s, X_k(s))] \sigma(s, X_k(s), u) dW(s). \end{aligned}$$

Der Prozess  $(Z_k(r))_{r \in [t_k, T]}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$Z_k(r) = \int_{t_k}^{r \wedge \tau_k} [D_x \varphi(s, X_k(s))] \sigma(s, X_k(s), u) dW(s)$$

ist ein quadratisch integrierbares Martingal und wir erhalten

$$0 \leq \frac{1}{h_k} \eta_k - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h_k} \int_t^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, X_k(s)) + \mathcal{L}^u \varphi(s, X_k(s)) + f(s, X_k(s), u) ds \right].$$

Beachte, dass  $\frac{1}{h_k}\eta_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und dem Satz der majorisierten Konvergenz schlussfolgern wir

$$0 \leq -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) - \mathcal{L}^u\varphi(t, x) - f(t, x, u).$$

Da  $u \in U$  beliebig gewählt wurde, haben wir

$$0 \leq -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) - H(t, x, D_x\varphi(t, x), D_x^2\varphi(t, x)).$$

**Schritt 2:** Wir zeigen, dass  $V$  eine Sublösung von (4.7) im Viskositätssinne ist. Seien  $(t_0, x_0) \in Q = [0, T) \times \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in C^2(Q)$ , so dass für alle  $(t, x) \in Q \setminus \{(t_0, x_0)\}$

$$\varphi(t_0, x_0) = V^*(t_0, x_0), \quad \varphi(t_0, x_0) > V^*(t, x).$$

Weiterhin definieren wir  $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$h(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) + H(t, x, D_x\varphi(t, x), D_x^2\varphi(t, x)).$$

Wir zeigen die Behauptung durch einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an

$$h(t_0, x_0) < 0.$$

Da die Funktion  $H$  oberhalbstetig ist, existiert eine offene und beschränkte Menge  $\mathcal{N}_r = \{(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| + \|x - x_0\|_n < r\}$  für hinreichend kleines  $r > 0$ , so dass

$$h(t, x) < 0 \tag{4.8}$$

für alle  $(t, x) \in \mathcal{N}_r$ . Da  $V^* - \varphi$  oberhalbstetig auf  $Q$  ist, gilt

$$\eta = \max\{V^*(t, x) - \varphi(t, x) : (t, x) \in \partial\mathcal{N}_r\} < 0. \tag{4.9}$$

Sei  $(t_k, x_k) \in \mathcal{N}_r$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $(t_k, x_k) \rightarrow (t_0, x_0)$  und  $V(t_k, x_k) \rightarrow V^*(t_0, x_0)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Beachte, dass  $V(t_k, x_k) - \varphi(t_k, x_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Somit können wir annehmen, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$

$$|V(t_k, x_k) - \varphi(t_k, x_k)| \leq -\frac{\eta}{2}$$

gilt. Für eine beliebige Kontrolle  $u \in U_{t_k}$ , sei  $(X_k(s))_{s \in [t_k, T]}$  die Lösung der SDE (3.1) mit Anfangsbedingung  $X_k(t_k) = x_k$ . Wir definieren die Stoppzeit

$$\tau_k = \inf\{s > t_k : (s, X_k(s)) \notin \mathcal{N}_r\}.$$

Aufgrund der pfadweisen Stetigkeit haben wir  $(\tau_k, X_k(\tau_k)) \in \partial\mathcal{N}_r$  und mit Gleichung (4.9) gilt

$$\varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) \geq -\eta + V^*(\tau_k, X_k(\tau_k)). \tag{4.10}$$

Ferner erhalten wir mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) &= \varphi(t_k, x_k) + \int_{t_k}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, X_k(s)) + \mathcal{L}^u \varphi(s, X_k(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_k}^{\tau_k} [D_x \varphi(s, X_k(s))] \sigma(s, X_k(s), u) dW(s).\end{aligned}$$

Der Prozess  $(Z_k(r))_{r \in [t_k, T]}$  gegeben durch

$$Z_k(r) = \int_{t_k}^{r \wedge \tau_k} [D_x \varphi(s, X_k(s))] \sigma(s, X_k(s), u(s)) dW(s)$$

ist ein quadratisch integrierbares Martingal und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}V(t_k, x_k) &\geq \frac{\eta}{2} + \varphi(t_k, x_k) \\ &\geq \frac{\eta}{2} + \mathbb{E} \left[ \varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) - \int_{t_k}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, X_k(s)) + \mathcal{L}^u \varphi(s, X_k(s)) ds \right] \\ &\geq \frac{\eta}{2} + \mathbb{E} \left[ \varphi(\tau_k, X_k(\tau_k)) - \int_{t_k}^{\tau_k} h(s, X_k(s)) - f(s, X_k(s), u(s)) ds \right].\end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen (4.8) und (4.10) folgt

$$V(t_k, x_k) \geq -\frac{\eta}{2} + \mathbb{E} \left[ V^*(\tau_k, X_k(\tau_k)) + \int_{t_k}^{\tau_k} f(s, X_k(s), u(s)) ds \right].$$

Beachte, dass  $-\frac{\eta}{2} > 0$  nicht von  $u \in U_{t_k}$  abhängt. Da  $u \in U_{t_k}$  beliebig gewählt wurde gilt

$$V(t_k, x_k) \geq -\frac{\eta}{2} + \sup_{u \in U_{t_k}} \mathbb{E} \left[ V^*(\tau_k, X_k(\tau_k)) + \int_{t_k}^{\tau_k} f(s, X_k(s), u(s)) ds \right],$$

was ein Widerspruch zu (4.6) darstellt. Daher erhalten wir

$$h(t_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, D_x \varphi(t_0, x_0), D_x^2 \varphi(t_0, x_0)) \geq 0.$$

□

Um die Wertefunktion im Sinne des Prinzips der dynamischen Programmierung zu charakterisieren, vervollständigen wir die Viskositätseigenschaft durch ein Eindeutigkeitsresultat, welches wir durch die Endbedingung erhalten. Dieses basiert im



wesentlichen auf Vergleichbarkeitsresultate und dem Lemma von Ishii. Dazu betrachten wir die parabolische Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t}v(t, x) - G(t, x, D_x v(t, x), D_x^2 v(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (4.11)$$

wobei  $G$  stetig und elliptisch ist. Wir setzen für  $\gamma > 0$

$$G^{+\gamma}(t, x, p, M) = \sup\{G(s, y, p, M) : (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, |t - s|^2 + \|x - y\|_n^2 \leq \gamma^2\},$$

$$G^{-\gamma}(t, x, p, M) = \inf\{G(s, y, p, M) : (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, |t - s|^2 + \|x - y\|_n^2 \leq \gamma^2\}.$$

Wir machen folgende Annahme:

**(A3)** Die Operatoren  $G^{+\gamma}$  und  $G^{-\gamma}$  genügen

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} [G^{+\gamma_\varepsilon}(t_\varepsilon, x_\varepsilon, p_\varepsilon, A_\varepsilon) - G^{-\gamma_\varepsilon}(s_\varepsilon, y_\varepsilon, p_\varepsilon, A_\varepsilon)]$$

$$\leq C(|t_0 - s_0| + \|x_0 - y_0\|_n)(1 + \|p_0\|_n + \alpha[|t_0 - s_0| + \|x_0 - y_0\|_n])$$

für  $(t_\varepsilon, x_\varepsilon), (s_\varepsilon, y_\varepsilon) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,  $p_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_\varepsilon \geq 0$  mit  $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \rightarrow (t_0, x_0)$ ,  $(s_\varepsilon, y_\varepsilon) \rightarrow (s_0, y_0)$ ,  $p_\varepsilon \rightarrow p_0$  und  $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma_0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathbb{S}^n$ , so dass

$$-KI_{2n} \leq \begin{pmatrix} A_\varepsilon & 0 \\ 0 & -B_\varepsilon \end{pmatrix} \leq 2\alpha \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Hier sind die Konstanten  $C, \alpha, K > 0$  unabhängig von  $\varepsilon$ .

**Bemerkung 4.9.** Falls  $f(\cdot, \cdot, u), b(\cdot, \cdot, u), \sigma(\cdot, \cdot, u) \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  mit  $u \in \mathbb{R}^m$  die Bedingung

$$\|b(t, x, u)\|_n + \|\sigma(t, x, u)\|_{n \times d} \leq c(1 + \|x\|_n + \|u\|_m)$$

für eine Konstante  $c > 0$  erfüllt, dann ist gilt **(A3)**.

**Satz 4.10.** Sei  $v: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oberhalbstetig und eine Sublösung von (4.11) im Viskositätsinne. Weiterhin sei  $w: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  unterhalbstetig und eine Superlösung von (4.11) im Viskositätsinne. Falls **(A3)** gilt, dann haben wir

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} [v(t, x) - w(t, x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [v(T, x) - w(T, x)].$$

### 4.3 Anwendung - Portfoliooptimierung mit unsicherem Einkommen

Wir betrachten das Beispiel aus Abschnitt 1.3. Wir erinnern, dass der Vermögensprozess die SDE

$$dX(s) = ([r + (\mu - r)\pi(s)]X(s) + c(s)) ds + \sigma \pi(s)X(s) dW(s) \quad (4.12)$$

erfüllt und der Prozess des Einkommen die SDE

$$dc(s) = \mu_c(s)c(s) dt + \sigma_c(s)c(s) d[\rho W(s) + \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{W}(s)] \quad (4.13)$$

genügt. Hier wird das Kostenfunktional

$$J(\pi) = \mathbb{E} \left[ e^{-\delta T} h(X(T)) \right]$$

maximiert.

Zunächst wollen wir die HJB Gleichung aufstellen. Dazu nehmen wir an, dass  $(X(s))_{s \in [t, T]}$  der zugehörige Vermögensprozess mit Startkapital  $X(t) = x > 0$  und  $(c(s))_{s \in [t, T]}$  der zugehörige Einkommensprozess mit Startwert  $c(t) = y > 0$  sind. Wir setzen  $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{W(r) : t \leq r \leq s\}$  ergänzt mit allen  $\mathbb{P}$ -Nullmengen von  $\mathcal{F}$ . Die nichtleere Menge der zulässigen Kontrollen  $\Pi_t$  umfasst alle  $\mathcal{F}_s^t$ -adaptierten Prozesse  $(\pi(s))_{s \in [t, T]}$  mit Werten in einer abgeschlossenen und konvexen Teilmenge  $\Pi \subset \mathbb{R}$ , so dass

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T |\pi(s)|^2 ds \right] < \infty.$$

Dann ist die Wertefunktion durch

$$V(t, x, y) = \sup_{\pi \in \Pi_t} \mathbb{E} \left[ e^{-\delta T} h(X(T)) \right]$$

gegeben und die HJB Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial}{\partial t} V(t, x, y) \\ & - \sup_{\pi \in \Pi} \left[ ([r + (\mu - r)\pi]x + y) \frac{\partial}{\partial x} V(t, x, y) + \mu_c(t)y \frac{\partial}{\partial y} V(t, x, y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma_c^2(t) y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(t, x, y) + \rho \sigma \pi x \sigma_c(t) y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(t, x, y) \right] \end{aligned}$$

für  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}_{>0}$  mit der Randbedingung

$$V(T, x, y) = e^{-\delta T} h(x)$$

für  $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ .

Wir nehmen an, dass  $h(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$  mit  $\gamma \in (0, 1)$ . Dann ist die Wertefunktion  $V$  eine Viskositätslösung der HJB Gleichung der Form

$$V(t, x, y) = y^\gamma \psi \left( t, \frac{x}{y} \right),$$

wobei  $\psi: [0, T] \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die eindeutige Viskositätslösung der PDE

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, z) + \mu_c(t) \left[ \gamma \psi(t, z) - z \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, z) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sigma_c^2(t) \left[ \gamma(\gamma - 1) \psi(t, z) - 2(\gamma - 1) z \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, z) + z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, z) \right] \\ & + \sup_{\pi \in \Pi} \left[ [r + (\mu - r)\pi] z \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, z) + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, z) \right. \\ & \left. + \rho \sigma \pi (\gamma - 1) \sigma_c(t) z \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, z) - \rho \sigma \pi \sigma_c(t) z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, z) \right] \end{aligned}$$

mit der Endbedingung  $\psi(T, z) = e^{-\delta T} \frac{1}{\gamma} z^\gamma$ .

**Bemerkung 4.11.** Eine konkrete Darstellung der Wertefunktion  $V$  steht nicht zur Verfügung. Nichtsdestotrotz lässt sich die Funktion  $\psi$  durch numerische Verfahren für Viskositätslösungen der PDE ermitteln.

Wir setzen

$$\alpha = \arg \max_{\pi \in \Pi} \left[ r + (\mu - r)\pi \right] \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial z} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 \left( \frac{x}{y} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right) + \rho \sigma \pi (\gamma - 1) \sigma_c(t) \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial z} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right) - \rho \sigma \pi \sigma_c(t) \left( \frac{x}{y} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right) \right].$$

Das Maximum ist explizit gegeben durch

$$\alpha(t, x, y) = - \frac{\mu - r + \rho \sigma \pi (\gamma - 1) \sigma_c(t)}{\sigma^2} \frac{y \frac{\partial}{\partial z} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right)}{x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \left( t, \frac{x}{y} \right)} + \frac{\rho \sigma_c(t)}{\sigma},$$

welches auf dem Rand von  $\Pi$  angenommen wird. Falls  $\psi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ , dann ist die optimale Kontrolle  $\bar{\pi} \in \Pi_t$  explizit gegeben durch

$$\bar{\pi}(s, \bar{X}(s), \bar{c}(s)) = \alpha(s, \bar{X}(s), \bar{c}(s)), \quad (4.14)$$

wobei  $(\bar{X}(s))_{s \in [t, T]}$  und  $(\bar{c}(s))_{s \in [t, T]}$  die Lösungen der Gleichungen (4.12) und (4.13) bezüglich der optimalen Kontrolle  $\bar{\pi}$  sind.

**Bemerkung 4.12.** Ist die Glattheitsvoraussetzung  $\psi \in C^{1,2}((0, T] \times \mathbb{R})$  nicht erfüllt, so gibt die Formel (4.14) eine Approximation der optimalen Kontrolle.

## 5 Weitere Themen

In diesem Kapitel beschreiben wir weitere Kontrollprobleme, die eine Erweiterung der präsentierten Lösungskonzepte erfordern.

### 5.1 Optimales Stoppen

Wie in Abschnitt 1.1 betrachten wir wieder einen Finanzmarkt mit einem Bond und einer Aktie, die zeit-stetig über ein endliches Intervall  $[0, T]$  gehandelt werden können. Ein Investor habe eine amerikanische Put Option auf die Aktie mit Ausübungspreis  $K > 0$  und Laufzeit  $T$ , d.h. es besteht die Möglichkeit die Aktie zu einem beliebigen Zeitpunkt  $\tau \in [0, T]$  zum Preis  $K$  zu verkaufen.

**Frage:** Zu welchem Zeitpunkt  $\tau$  sollte der Investor die Option optimalerweise ausüben?

Wir bemerken, dass der Investor nur dann ausüben sollte, wenn  $P_1(t) < K$ . Ansonsten wäre es sinnvoller die Option zum Preis  $P_1(t)$  zu verkaufen. Die Auszahlung zum