Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

2. Serie

1. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen k und n mit $k \geq n$. Wie viele Möglichkeiten existieren die Zahl k als Summe

$$k = k_1 + \cdots + k_n$$

von n natürlichen Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ mit $k_j \geq 1$ darzustellen?
Hinweis: Versuchen Sie diesen Fall auf die Darstellung von k als Summe von n nicht-negativen ganzen Zahlen zurück zu führen.

2. Zur Wahl eines neuen Vorsitzenden treten 6 Kandidaten an. Jeder der 50 Delegierten gibt eine Stimme für einen der 6 Kandidaten ab. Wie viele unterschiedliche Wahlergebnisse sind möglich? Man beachte, dass bei der Auszählung der Stimmzettel nicht erkennbar ist, welcher Delegierte welchen Kandidaten gewählt hat. Wie viele Ergebnisse existieren, in denen jeder Kandidat mindestens eine Stimme erhält?

3. Man platziere 5 Partikel in 9 Fächer. Wie viele verschiedene Verteilungen der Partikel existieren? Dabei sind die zwei folgenden Fälle zu unterscheiden:
   (A) Die Partikel sind anonym, d.h. nicht unterscheidbar. 1P
   (U) Die Partikel tragen Namen, d.h. sie sind unterscheidbar. 1P

   Man bezeichne die 9 Fächer mit F_1 bis F_9. In jeder der zwei Fälle (A) und (U) bestimme man die Anzahl der Verteilungen der Partikel für die folgendes gilt:
   (a) In jedem der Fächer $F_1, \ldots, F_5$ befindet sich genau ein Partikel und 1P
   (b) in keinem der 9 Fächer liegt mehr als ein Partikel. 1P

4. Wie viele Möglichkeiten existieren, 3 weiße, 4 blaue und 2 schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen? Wie viele dieser Anordnungen haben die Eigenschaft, dass die ersten drei Bälle blau sind? Wie viele Anordnungen der Kugeln existieren, sodass Kugeln derselben Farbe zusammen liegen?

5. Berechnen Sie folgende Summen: 5P

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} 2^{-k+1} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{5} \binom{12}{k} \binom{13}{5-k}, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=10}^{19} \binom{19}{k}.$$

6. Man beweise, dass für $n, k \geq 1$ die Aussage 2P

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

gilt.

Abgabe der Lösungen zu (3), (5) und (6): In der Vorlesung am 07.11.2019