Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

3. Serie

1. Die Ereignisse A und B haben die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$, und es gelte $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Welche Wahrscheinlichkeiten besitzen dann $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A \Delta B)$ sowie $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$? 3P

2. Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$. Man zeige, dass unter dieser Annahme folgende Gleichung richtig ist:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A^c \cup B^c)\,. \tag{1}$$

   Gilt (1) auch unter der allgemeineren Bedingung $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$?

3. Beweisen sie die folgenden Aussagen:
   (a) Sei B ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) = 0$. Dann folgt für alle Ereignisse A, dass 2P

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\,.$$

   (b) Gilt dagegen $\mathbb{P}(B) = 1$, dann impliziert dies für alle Ereignisse A sowohl 2P

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{als auch} \quad \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A^c)\,.$$

   Hinweis: Man beachte, dass man weder aus $\mathbb{P}(B) = 0$ schlussfolgern kann, es gilt $B = \emptyset$, noch aus $\mathbb{P}(B) = 1$, dass $B = \Omega$.

4. Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0,6$ und $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Bestimmen Sie die minimal und maximal möglichen Werte von $\mathbb{P}(A \cup B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B)$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

5. Ein Mann hat in seiner Tasche n Schlüssel, von denen genau einer in das Schloss der Tür passt. Er probiert nun nacheinander in zufälliger Reihenfolge die Schlüssel, wobei er Schlüssel, die nicht passen, weglegt. Wie wahrscheinlich ist es, dass zu vorgegebenem $k \leq n$ genau der k-te Schlüssel passt? 2P

6. (Paradoxon von Chevalier de Méré) De Méré überlegte sich, dass es beim Wurf mit drei nicht unterscheidbaren fairen Würfeln jeweils genau sechs Möglichkeiten gibt, die Augensummen 11 bzw. 12 zu erzielen. Also schlussfolgerte er, die beiden Ereignisse (Summe 11 bzw. Summe 12) besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit. Bei Versuchen fand er dies aber nicht bestätigt. Worin bestand sein Trugschluss? Wie berechnen sich die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse?

Abgabe der Lösungen zu (1), (3) und (5): In der Vorlesung am 14.11.2019