

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

4. Serie

1. Gegeben seien n Ereignisse A_1, \dots, A_n mit

$$\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Warum folgt hieraus $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 1$?

2. Für drei Ereignisse A, B und C trete das Ereignis D ein, wenn genau zwei der drei Ereignisse A, B und C eintreten. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

gilt.

3. In einer Urne befinden sich 7 weiße, 8 rote und 5 schwarze Kugeln. Man entnehme zufällig und ohne Zurücklegen 5 Kugeln. Wie wahrscheinlich¹ ist es, dass sich unter den gezogenen Kugeln solche aller drei Farben befinden? 3P

4. (a) Für gegebene Ereignisse A_1, \dots, A_n beweise man die *Kettenregel* für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Dabei setzen wir voraus, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten sinnvoll definiert sind.

- (b) Man ziehe zufällig 3 Zahlen aus 1 bis 12 ohne Zurücklegen. Wie wahrscheinlich ist es, dass die zuerst gezogene Zahl gerade ist, die zweite ungerade und die dritte wieder gerade?

Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der, dass sich unter den drei gezogenen Zahlen zwei gerade und eine ungerade Zahl befinden.

5. Gegeben seien drei Urnen U_1, U_2 und U_3 die jeweils 6 Bälle enthalten. Urne U_1 enthält 5 weiße und einen schwarzen Ball, U_2 enthält 4 weiße und 2 schwarze Bälle und, schließlich, enthält U_3 sowohl 3 weiße als auch 3 schwarze Bälle. Man wähle zufällig eine der drei Urnen (alle drei Urnen sind gleich wahrscheinlich) und ziehe 2 Bälle ohne Zurücklegen des zuerst gezogenen Balls.

- (a) Geben Sie einen für dieses Zufallsexperiment geeigneten Grundraum Ω an. 1P
(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende drei Ereignisse: Beide entnommenen Kugeln sind weiß bzw. eine Kugel ist weiß, die andere schwarz und, schließlich, beide Kugeln sind schwarz. 3P

Abgabe der Lösungen zu (3) und (5): In der Vorlesung am 21.11.2019

¹Der exakte numerische Wert muss nicht berechnet werden.