

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

5. Serie

1. Für zwei Ereignisse A und B mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ gelte $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$. Zeigen Sie, dass daraus $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ folgt. 2P
2. Gegeben seien drei äußerlich nicht unterscheidbare Würfel. Zwei von ihnen sind fair, der dritte verfälscht, und zwar so, dass die Zahl 6 mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ erscheint. Die anderen fünf Zahlen sind gleich wahrscheinlich. Wir wählen nun zufällig einen der drei Würfel (jeder der drei Würfel wird mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ gewählt) und werfen ihn. Registriert wird die Zahl, die auf dem gewählten Würfel zu sehen ist.
 - (a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum zur Beschreibung des Experiments an.
 - (b) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei diesem Experiment die Zahlen von 1 bis 6 erscheinen.
 - (c) Angenommen, wir beobachten bei diesem Experiment die Zahl 2. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass wir den gefälschten Würfel gewählt hatten?
3. In einer Urne befinden sich 4 weiße und 5 schwarze Kugeln. Wir entnehmen nun aus der Urne nacheinander drei Kugeln, ohne die bereits gezogenen Kugeln zurück zu legen. 4P
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die als dritte entnommene Kugel schwarz?
 - (b) Angenommen, die dritte Kugel war schwarz, mit welcher Wahrscheinlichkeit hatten die beiden ersten Kugeln unterschiedliche Farben? Und wie wahrscheinlich ist es, dass die beiden ersten Kugeln weiß waren, wie wahrscheinlich, dass beide schwarz sind?
4. Wenn man von Jena nach Weimar mit dem Auto fährt, so kann man entweder die Autobahn A4, die Bundesstraße B7 oder die Landstraße L2161 benutzen. Auf der A4 kommt man mit Wahrscheinlichkeit von 25% in einen Stau, auf der Bundesstraße B7 mit 10% und auf der Landstraße L2161 mit 5%. Wir wählen den Weg über die Autobahn mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, über die Bundesstraße 7 mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ und über die Landstraße mit Wahrscheinlichkeit $1/6$. 4P
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichen wir Weimar, **ohne** in einen Stau geraten zu sein?
 - (b) Sind wir in einen Stau gekommen, mit welcher Wahrscheinlichkeit kamen wir über A4, B7 oder L2161 ?
5. Unter 100 in einem Werk hergestellten Sicherungen sind mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ jeweils j , $j = 0, 1, 2$, Sicherungen defekt. Man entnehme nun aus einer Lieferung von 100 Stück zufällig 20 Sicherungen und prüfe diese. Es stellt sich heraus, dass sich unter den geprüften Sicherungen keine defekte befindet. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass in der ganzen Lieferung von 100 Stück keine defekte Sicherung ist?

Abgabe der Lösungen zu (1), (3) und (4): In der Vorlesung am 28.11.2019