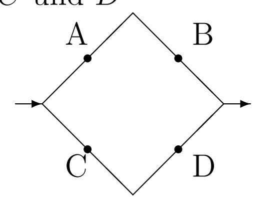
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

6. Serie

1. In einem elektrisches Netzwerk befinden sich vier Schalter A, B, C und D (siehe rechtes Bild). Diese Schalter werden unabhängig voneinander ein- bzw. ausgeschaltet. Jeder der vier Schalter ist mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ eingeschaltet (dann fließt Strom) und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ ausgeschaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fließt Strom von der linken zur rechten Seite?



2. Es seien A, B und C drei **unabhängige** Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie 2P

$$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A \setminus (B \cap C))\,.$$

3. Eine faire Münze werde 6-mal geworfen. Überprüfen Sie ob die Ereignisse $A = \{$Kopf erscheint genau 4-mal$\}$ und $B = \{$Die ersten zwei Würfe sind entweder beide Kopf oder beide Zahl$\}$ unabhängig voneinander sind. 2P

4. In einer Urne befinden sich 20 Kugeln, die von 1 bis 20 durchnummeriert sind. Man entnehme nun zufällig zwei Kugeln. Mit a_1 bzw. a_2 bezeichne man die Werte auf der ersten bzw. der zweiten Kugel. Das Ereignis A tritt ein, wenn a_1 eine gerade Zahl ist während B im Fall $a_1 + a_2 = 21$ eintritt. Überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind. Dabei betrachte man die beiden folgenden Fälle voneinander getrennt:

   - Die zuerst gezogene Kugel wird zurückgelegt.
   - Die erste Kugel wird nicht wieder in die Urne gelegt.

   Zusatzfrage: Wie lauten die Antworten wenn B eintritt falls $a_1 + a_2 = 20$ gilt?

5. Es seien A, B und C drei Ereignisse. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Wenn A und B sowie A und C unabhängig sind, und außerdem $B \cap C = \emptyset$ gilt, dann sind auch A und $B \cup C$ unabhängig. 2P

   (b) Nehmen wir nunmehr an, dass die drei Ereignisse A, B and C unabhängig sind, so impliziert dies ebenfalls (ohne die zusätzliche Annahme $B \cap C = \emptyset$) die Unabhängigkeit von A und $B \cup C$. 2P

6. (a) Charakterisieren Sie Ereignisse, die von sich selbst unabhängig sind.

   (b) Ist es möglich, dass zwei **disjunkte** Ereignisse A und B unabhängig sind? Wenn ja, für welche Ereignisse A und B ist das möglich?

   (c) Beweisen Sie folgende Verschärfung eines Satzes aus der Vorlesung: Gilt für ein Ereignis A entweder $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$, so ist A von jedem Ereignis B unabhängig. 2P
   Hinweis: Verwenden Sie Ergebnisse aus Aufgabe 3 in der dritten Serie.

Abgabe der Lösungen zu (2), (3), (5) und (6c) in der Vorlesung am 05.12.2019