Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

7. Serie

1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion einer zufälligen Größe X. Zeigen Sie, dass dann für alle reellen Zahlen $a < b$ stets

$$\mathbb{P}\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a-) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\{a < X < b\} = F(b-) - F(a)$$

gilt.

2. Man werfe einen fairen Würfel 2-mal. Das Ergebnis ist $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots, 6\}$. Die zufällige Größe X sei dann durch 3P

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|\,, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2)\,,$$

definiert. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X sowie $\mathbb{P}\{X = k\}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

3. In einer Urne befinden sich 8 Kugeln. Davon seien drei mit der Zahl 0 und fünf mit der Zahl 2 beschriftet. Man entnehme der Urne zufällig 3 Kugeln ohne Zurücklegen. Die zufällige Größe X sei die Summe der Zahlen, die sich auf den drei gezogenen Kugeln befinden.

   (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

   (b) Man bestimme $\mathbb{P}\{X = k\}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

   (c) Berechnen Sie
$$\mathbb{P}\{X > 1\}\,, \quad \mathbb{P}\{X \in [1, 4]\} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\{X < 5\}\,.$$

4. Sei X eine zufällige Größe mit der folgenden Verteilungsfunktion F: 2P

$$F(s) := \begin{cases} 0 & : \ s < 0 \\ 1/3 & : \ 0 \le s < 1 \\ 4/9 & : \ 1 \le s < 2 \\ 7/9 & : \ 2 \le s < 3 \\ 1 & : \ 3 \le s \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}\{X = t\}$ für $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Berechnen Sie

$$\mathbb{P}\{0,5 < X \le 2\}\,, \quad \mathbb{P}\{X < 2\} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\{X > 1,5\}\,.$$

5. Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, sodass 4P

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{3^k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   (a) Welchen Wert hat $\mathbb{P}\{X = 0\}$?

   (b) Für $m \ge 1$ bestimme man $\mathbb{P}\{X \ge m\}$.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{P}\{X \in A\}$ wobei $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

6. Man werfe einen fairen Würfel n-mal. Das Ergebnis sei der Vektor $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ mit $\omega_j \in \{1, \ldots, 6\}$. Die zufällige Größe X sei durch

$$X(\omega) = \min\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}\,, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\,,$$

definiert.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X sowie $\mathbb{P}\{X = k\}$ für $k = 1, \ldots, 6$.

Abgabe der Lösungen zu (2), (4) und (5) in der Vorlesung am 12.12.2019