# Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

## 8. Serie

1. Man werfe einen fairen Würfel 2-mal. Das Ergebnis sei ein Paar $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots, 6\}$. Die zufällige Größe $X$ definiere man durch 4P

$$X(\omega) = \omega_1 - \min\{\omega_1, \omega_2\}\,.$$

   (a) Bestimmen Sie die Zähldichte von $X$.

   (b) Man berechne sowohl $\mathbb{E}X$ als auch $\mathbb{E}[-X]$, $\mathbb{E}[3X-2]$ und $\mathbb{E}[X(5-X)]$.

2. (Aufgabe von Luca Pacioli aus dem Jahr 1494; die erste richtige Lösung fand Blaise Pascal 1654)
   Zwei Personen, A und B, spielen ein faires Spiel, d.h. ein Spiel, bei dem die Gewinnchancen für beide Spieler jeweils 50 % betragen. Gesamtsieger ist derjenige, der zuerst 6 Partien gewonnen hat. Dieser erhält den Gesamteinsatz von 40 Talern ausgezahlt. Eines Tages muss das Spiel beim Stand von 5 Siegen von A und 3 Siegen von B abgebrochen werden. Wie sind in diesem Fall die 40 Taler unter A und B gerechterweise aufzuteilen ? 2P

3. Zeigen Sie, dass für eine zufällige Größe $X$ mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ stets

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\} \tag{1}$$

   richtig ist.

4. Für eine zufällige Größe $X$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gelte mit einem $q \geq 2$ die Aussage

$$\mathbb{P}\{X = k\} = q^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   (a) Warum muss man $q \geq 2$ voraussetzen, obwohl $\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} < \infty$ für $q > 1$ ?

   (b) Welchen Wert besitzt $\mathbb{P}\{X = 0\}$ ?

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ mit Hilfe von Formel (1) aus Aufgabe 3.

   (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ direkt über die Definition $\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}\{X = k\}$.

5. Man verteile unabhängig voneinander $n$ Bälle in $N$ Boxen. Dabei sei jede Box gleich wahrscheinlich. Was ist die durchschnittliche Anzahl von Boxen, die leer bleiben? 2P

   *Hinweis:* Definieren Sie zufällige Größen $X_j$, $1 \leq j \leq N$, durch $X_j = 1$ wenn Box $j$ leer bleibt. Ansonsten sei $X_j = 0$.

**Abgabe** der Lösungen zu (1), (2) und (5) in der Vorlesung am 19.12.2019