Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

9. Serie

1. Die Verteilung einer zufälligen Größe X sei durch

$$\mathbb{P}\{X=0\}=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}\{X=1\}=\frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\{X=2\}=\mathbb{P}\{X=3\}=\frac{1}{4}$$

gegeben. Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{V}X$.

2. Für eine diskrete zufällige Größe X gelte $\mathbb{E}X=1$ und $\mathbb{E}\big[X(X-2)\big]=3$. Welchen Wert hat $\mathbb{V}(-3X+5)$?

3. Gegeben seien natürliche Zahlen N, M und n mit $M,n\leq N$. Man definiert nun eine Funktion $p:\{0,\dots,n\}\to\mathbb{R}$ durch 4P

$$p(m):=\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad m=0,\dots,n\,.$$

   (a) Beweisen Sie, dass p eine Zähldichte ist.

   (b) Für eine zufällige Größe X mit $\mathbb{P}\{X=m\}=p(m)$ berechne man $\mathbb{E}X$.

Anmerkung: Ein X mit dieser Verteilung heißt hypergeometrische zufällige Größe mit Parametern N,M und n.

4. In einer Lotterie bezahlt ein Spieler 1 Euro und wählt 4 Zahlen aus $\{0,\dots,9\}$. Bei der Ziehung werden nun zufällig 4 Zahlen aus $\{0,\dots,9\}$ gezogen (ohne Wiederholung). Hat der Spieler auf seinem Tippschein drei der gezogenen Zahlen, so bekommt er 5 Euro, stimmen sogar alle vier gezogenen Zahlen mit den getippten überein, erhält er 10 Euro. Ansonsten verliert der Spieler seinen Einsatz. Wie groß ist der durchschnittliche Ertrag (Gewinn - Einsatz) des Spielers? 2P

5. Eine Funktion $p:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sei durch 4P

$$p(n):=\frac{1}{n(n+1)}, \quad n\geq 1\,,$$

definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass p eine Zähldichte auf $\mathbb{N}$ ist.

Für eine zufällige Größe X mit der Zähldichte p bestimme man

   (b) die Verteilungsfunktion F und

   (c) berechne $\mathbb{E}X$.

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{n(n+1)}$ als $\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$ mit geeigneten reellen Zahlen a und b.

6. Beim Lottospiel 6 aus 49 sei X die größte der gezogenen Zahlen. Man zeige, dass dann

$$\mathbb{E}X=\frac{6\cdot 43!}{49!}\sum_{k=6}^{49}k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)=42,8571$$

gilt. Wie kann man mithilfe einer kleinen Umformung daraus auch den Erwartungswert der kleinsten gezogenen Zahl bestimmen?

Abgabe der Lösungen zu (3), (4) und (5) in der Vorlesung am 09.01.2020