Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

10. Serie

1. Beim Versenden von Paketen ins Ausland erreichen im Durchschnitt 9 von 10 Paketen den Adressaten. Man versende nun unabhängig voneinander n Pakete.
   (a) Wie wahrscheinlich ist es, dass genau k, $0 \le k \le n$, der abgesandten Pakete eintreffen?
   (b) Wenn jedes der n Pakete einen Wert von M Euro besitzt, welchen durchschnittlichen Wert haben die eintreffenden Pakete?

2. In einer Urne befinden sich n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind. Man ziehe nun genau n-mal eine Kugel mit Zurücklegen (alle Kugeln sind gleich wahrscheinlich). Es seien 3P

   $$p_n := \mathbb{P}\{\text{Zahl 1 erscheint genau einmal}\} \text{ und } q_n := \mathbb{P}\{\text{Zahl 1 erscheint mindestens einmal}\}.$$

   Berechnen Sie p_n und q_n sowie deren Limites für $n \to \infty$.

3. Beim Senden von Nachrichten von einer Station A nach einer Station B werden durchschnittlich 3% der Signale falsch übertragen.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Übertragung von 300 Nachrichten mindestens 3 Nachrichten falsch übertragen werden?
   (b) Vergleichen Sie die exakte Lösung dieses Problems mit der approximativen Lösung unter Verwendung der Poisson-Verteilung.
   (c) Wie wahrscheinlich ist es, dass alle 300 Nachrichten korrekt übertragen werden? Vergleichen Sie auch hier die exakte mit der approximativen Lösung.

4. Wir nehmen an, dass in einer Stadt die Zahl der Unfälle pro Woche Poisson-verteilt ist. Im Durchschnitt zählt man in einer Woche $4,5$ Unfälle. Wie wahrscheinlich ist es, dass in der nächsten Woche genau 2 oder 3 Unfälle zu beobachten sind? Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht kein Unfall? 2P

5. Eine Firma beschäftigt n Angestellte. Die Firma schließt an allen Tagen des Jahres, an denen wenigstens einer ihrer Angestellten Geburtstag hat. Alle anderen 365 Tage des Jahres sind dann Arbeitstage. Wie viele Angestellte muss die Firma beschäftigen, damit die durchschnittliche Gesamtarbeitszeit maximal wird? Dabei ist die Gesamtarbeitszeit das Produkt aus Anzahl der Beschäftigten mit der Anzahl der Arbeitstage.

   Hinweis: Betrachten Sie die zufälligen Größen X_j, $j = 1, \ldots, 365$, mit $X_j = 0$ falls am Tag j wenigstens ein Arbeiter Geburtstag hat und $X_j = 1$ sonst.

6. In einer Urne befinden sich weiße und schwarze Kugeln in einem unbekannten Verhältnis $p = |\text{Weiße Kugeln}|/|\text{Alle Kugeln}|$. Man entnehme nun zufällig n Kugeln mit Zurücklegen. Dabei beobachte man k, $0 \le k \le n$, weiße Kugeln. Man bestimme das Verhältnis $p \in [0, 1]$ für das das Ereignis "k weiße Kugeln" am wahrscheinlichsten wird. 4P

   Hinweis: Die Anzahl X_p von beobachteten weißen Kugeln ist binomial verteilt mit unbekanntem Parameter $p \in [0, 1]$. Man untersuche nun mit analytischen Methoden die Funktion $p \to \mathbb{P}\{X_p = k\}$ auf Maxima.

   Bemerkung: Der so gefundene maximale Wert $\hat{p}(k)$ heißt Maximum Likelihood Schätzer für p

Abgabe der Lösungen zu (2), (4) und (6) in der Vorlesung am 16.01.2020