

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

11. Serie

- Ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt 0 im Ursprung der Zahlengerade. In jedem Takt springt es mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ um einen Schritt nach rechts, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um einen Schritt nach links. Zum Zeitpunkt 1 befindet es sich also mit Wahrscheinlichkeit p in $+1$, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ in -1 , nach dem zweiten Schritt kann es sich in -2 oder 0 oder $+2$ befinden, usw. Es sei X_n der Ort des Teilchens nach n unabhängigen Sprüngen.
 - Bestimmen Sie $\mathbb{P}\{X_n = k\}$ für eine ganze Zahl k .
 - Berechnen Sie $\mathbb{E}X_n$, d.h. den mittleren Aufenthaltsort des Teilchens.
- Berechnen Sie die Varianz einer Pois_λ -verteilten zufälligen Größe.
- Es sei $0 < p < 1$ die Wahrscheinlichkeit, beim Elfmeterschießen ein Tor zu erzielen. Mannschaft A beginnt, danach schießt Mannschaft B zweimal, dann wieder einmal A , danach zweimal B , also jeweils einmal A , gefolgt von zweimal B . Gewinner ist, wer zuerst ein Tor erzielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Mannschaft A ? Für welche Zahl p wird das Spiel fair, d.h., wann betragen die Gewinnchancen von A bzw. B jeweils $1/2$? 3P
- Eine zufällige Größe X sei geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass 2P
dann die Gleichung

$$\mathbb{P}\{X = k + n \mid X > n\} = \mathbb{P}\{X = k\}, \quad 1 \leq n < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

gilt.

Anmerkung: Aufgrund dieser Eigenschaft wird die geometrische Verteilung als “gedächtnislos“ bezeichnet. Warum?

- Man werfe einen fairen Würfel sechsmal.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint jede gerade Zahl genau zweimal?
 - Wie wahrscheinlich ist es, dass die Zahl 5 genau dreimal erscheint sowie die Zahlen 2, 4 und 6 jeweils einmal?
- In einem Land sind 40 % der Autos rot, 25% sind schwarz, 15% sind blau und 20% haben eine andere Farbe. Man beobachtet zufällig 10 Autos.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht man 4 rote, 3 schwarze and ein blaues Auto?
 - Wie wahrscheinlich ist es¹, dass sich unter den 10 beobachteten Autos genau so viele rote wie schwarze Autos befinden?
- In einer Urne befinden sich weiße und schwarze Kugeln. Der Anteil der weißen Kugeln sei p mit $0 \leq p \leq 1$, somit der der schwarzen Kugeln $1 - p$. Man ziehe nun nacheinander (ohne Zurücklegen) alle Kugeln aus der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zuletzt gezogene Kugel schwarz? 2P

Abgabe der Lösungen zu (3), (4) und (7) in der Vorlesung am 23.01.2020

¹Es reicht, wenn Sie eine Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit angeben.