Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 2019/2020

12. Serie

1. Beim Problem des Sammlers werden bekanntlich n Bilder unabhängig voneinander den produzierten Cornflakesschachteln beigegeben, wobei die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Bildes $1/n$ beträgt. Wie in der Vorlesung gezeigt, muss man im Durchschnitt
$$n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
Schachteln kaufen, ehe man alle Bilder besitzt.

   (a) Wenn der Sammler bereits alle Bilder außer einem besitzt, wie viele Schachteln muss er durchschnittlich kaufen, um auch noch das letzte fehlende Bild zu bekommen? 1P

   (b) Sei n eine gerade Zahl, so bezeichne d_n die durchschnittliche Anzahl von notwendigen Einkäufen, ehe man genau die Hälfte aller n Bilder im Besitz hat? Berechnen Sie d_n. 2P

   (c) ($\star$) Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ die Aussage $\frac{d_n}{n} \to \ln 2$ gilt. Für große n muss man also im Durchschnitt $n \cdot \ln 2 \approx 0,693 \cdot n$ Pakete kaufen, um die Hälfte der Bilder zu besitzen.
   Hinweis: Verwenden Sie
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\gamma$$
   mit der Euler-Mascheroni-Konstante $\gamma \approx 0,577214$.

2. Gegeben sei eine exponentiell verteilte zufällige Größe X mit Parameter $\lambda > 0$. D.h., ihre Verteilungsdichte p ist 4P
$$p(s)=\begin{cases} 0 & : \ s<0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} & : \ s\geq 0 \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

   (b) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{V}X$.

   (c) Gegeben seien positive Zahlen t und s. Zeigen Sie, dass dann
$$\mathbb{P}\{X \geq t+s | X \geq s\} = \mathbb{P}\{X \geq t\}$$
   gilt.
   Anmerkung: Wenn X die Lebenszeit eines Bauteils beschreibt, so sagt diese Eigenschaft, dass das Bauteil nicht altert. Warum?

3. Mit einer Konstanten $c > 0$ sei die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$p(s)=\begin{cases} 0 & : \ s\notin[0,1] \\ c\cdot s^3 & : \ 0\leq s\leq 1 \end{cases}$$
gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die Konstante $c > 0$, sodass p eine Verteilunssdichte wird.

   (b) Für eine zufällige Größe X mit Verteilungsdichte p bestimme man die Verteilungsfunktion.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{V}X$.

4. Eine zufällige Größe X besitze die Verteilungsfunktion F mit 3P
$$F(s)=\begin{cases} 0 & : \ s<-1 \\ \frac{(s+1)^2}{2} & : \ -1\leq s<0 \\ \frac{1}{2}+s-\frac{s^2}{2} & : \ 0\leq s<1 \\ 1 & : \ s\geq 1 \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte von X.

   (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}\{-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\}$.

   (c) Für $n \geq 1$ bestimme man die n-ten Momente $\mathbb{E}X^n$.

Abgabe der Lösungen zu (1a), (1b), (2) und (4) in der Vorlesung am 30.01.2020