Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20

Blatt 1, Abgabe: 21.10.2019 (vor der Vorlesung)

1. (1 Punkt)

   $\mathcal{R}$ sei ein Mengenring in einer nichtleeren Menge Ω und es seien $A, B \in \mathcal{R}$.

   Zeigen Sie, dass $A \cap B \in \mathcal{R}$ folgt!

2. (4 Punkte)

   Es seien $\mathcal{I}^d = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\colon\ -\infty < a_i \le b_i < \infty\}$ die Menge der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^d$ und

   $$\mathcal{B}_0^d = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} A_i : \quad A_1, \dots, A_k \in \mathcal{I}^d, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_0^d$ der kleinste Mengenring in $\mathbb{R}^d$ ist, der $\mathcal{I}^d$ enthält!

   Hinweis: Um aus $A, B \in \mathcal{B}_0^d$ die Eigenschaft $A \setminus B \in \mathcal{B}_0^d$ zu folgern zeigen Sie zunächst, dass für $A, B \in \mathcal{I}^d$ die Differenzmenge $A \setminus B$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{I}^d$ dargestellt werden kann. Danach zeigen Sie, dass aus $A \in \mathcal{B}_0^d$ und $B \in \mathcal{I}^d$ die Eigenschaft $A \setminus B \in \mathcal{B}_0^d$ folgt.

3. (1+3 Punkte)

   (i) Ω sei eine nichtleere Menge. Zu einem Mengensystem $\mathcal{M}$ in Ω sei

   $$\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A}\colon \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra in } \Omega,\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

   die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra.

   Zeigen Sie, dass $\sigma(\sigma(\mathcal{M})) = \sigma(\mathcal{M})$ gilt!

   (ii) Es seien $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{I}^d = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\colon\ -\infty < a_i \le b_i < \infty\}$ und $\mathcal{O} = \{O\colon\quad O \text{ offene Menge in } \Omega\}$.

   Zeigen Sie, dass

   $$\sigma(\mathcal{I}^d) = \sigma(\mathcal{O})$$

   gilt!

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{I}^d \subseteq \sigma(\mathcal{O})$ und $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d)$ gelten!