Nachtrag zur Übung

Lino Haupt

22. Oktober 2019

Seien $A, B \in \mathcal{I}^d$. Dabei haben die Mengen folgende Darstellungen

$$A = \prod_{i=1}^{d} (a_{i,1}, a_{i,2}] \quad \text{und} \quad B = \prod_{i=1}^{d} (a_{i,3}, a_{i,4}].$$

Es seien $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4} \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass für $j \in \{1,2,3\}$ gilt $z_{i,j} \leqslant z_{i,j+1}$ und $\{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4}\} = \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}\}$. Dabei sind also die $z_{i,j}$ die der Größe nach geordneten Intervallgrenzen. Es sei C die Menge der Tupel aller solcher Intervallgrenzen, also

$$C := \prod_{i=1}^{d} \{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}\},$$

dabei fehlt $z_{i,4}$, da wir immer das Intervall von $z_{i,j}$ bis $z_{i,j+1}$ betrachten wollen. Es sei $c \in C$, mit der Darstellung $c = (z_{1,j_1}, \ldots, z_{d,j_d})$ gegeben, dann sei der Quader $Q(c)$ gegeben durch

$$Q(c) := \prod_{i=1}^{d} (z_{i,j_i}, z_{i,j_i+1}]$$

Es sei $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_d) \longmapsto x_i$ die kanonische Projektion auf die i-te Koordinate. Nun behaupte ich, dass folgendes gilt:

$$A \setminus B = \bigcup_{\substack{c:c\in C \\ Q(c)\subseteq A\setminus B}} Q(c)$$

Beweis. Offenbar ist $A \setminus B \supseteq \bigcup_{\substack{c:c\in C \\ Q(c)\subseteq A\setminus B}} Q(c)$, denn alle $Q(c)$ sind per Bedingung Teilmenge von $A \setminus B$. Für die andere Inklusion beachte man, dass für $c \neq k$ die Mengen $Q(c)$ und $Q(k)$ disjunkt sind. Sei also $x \in A \setminus B$ beliebig. Dann ist $x \in A$ und daher gibt es ein $c = (z_{1,j_1}, \ldots, z_{d,j_d})$, sodass $x \in Q(c)$ (man wähle einfach $z_{i,j_i} \leqslant \pi_i(x)$ maximal). Angenommen $Q(c) \not\subseteq A \setminus B$. Dann ist $Q(c) \cap B \neq \emptyset$. Es gibt daher ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ sodass $\pi_i(Q(c))$ als Intervall einen Randpunkt von $\pi_i(B)$ in seinem Inneren enthält. Das ist ein Widerspruch, denn $\pi_i(Q(c)) = (z_{i,j_i}, z_{i,j_i+1}]$, kann per Konstruktion (die z_{i,j_i} und z_{i,j_i+1} sind per Wahl der z_i, j direkt aufeinanderfolgend) keinen Randpunkt enthalten. Also ist $Q(c) \subseteq A \setminus B$ und damit gilt $x \in \bigcup_{\substack{c:c\in C \\ Q(c)\subseteq A\setminus B}} Q(c)$. Da $x \in A \setminus B$ beliebig war folgt $A \setminus B \subseteq \bigcup_{\substack{c:c\in C \\ Q(c)\subseteq A\setminus B}} Q(c)$. Das beendet den Beweis.

$\square$