Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20

Blatt 2, Abgabe: 04.11.2019 (vor der Vorlesung)

4. (1+2 Punkte)

   Gegeben sei der Mengenring $\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} (n_i - 1, n_i]\colon\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z},\ k \in \{0, 1, \ldots\} \right\}$ in $\Omega = \mathbb{R}$. μ sei ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\mu((n-1, n]) = 1\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (i) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{R})$!

   (ii) Für $Q \in 2^{\Omega}$ sei

   $$\mu^*(Q) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\colon \quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R},\ Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass μ^* ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, aber kein Maß auf 2^{Ω} ist!

5. (2 Punkte)

   Es sei $\mathcal{R}$ der von dem Mengensystem $\{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty < a \leq b < \infty\}$ erzeugte Mengenring und μ mit

   $$\mu(A) = \operatorname{card}(A) = \text{Anzahl der Elemente von } A$$

   sei ein (nicht σ-endliches) Prämaß auf $\mathcal{R}$ gegeben.

   Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra (in $\mathbb{Q}$) gibt!

   Hinweis: $\sigma(\mathcal{R})$ enthält auch nichtleere Mengen mit endlicher Kardinalität, $\mathcal{R}$ dagegen nicht.

6. (2+3 Punkte)

   $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d)$ sei die σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^d$ sei beliebig. Zeigen Sie:

   (i) Falls $B \in \mathcal{B}^d$, so folgt $B + b = \{x + b\colon\ x \in B\} \in \mathcal{B}^d$.
   Hinweis: Definieren Sie das „System der guten Mengen“ $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}^d\colon\ B + b \in \mathcal{B}^d\}$ und zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{A}$ und dass $\mathcal{A}$ σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ ist.

   (ii) Das Lebesgue-Borel-Maß β^d auf $\mathcal{B}^d$ ist translationsinvariant, d.h.,

   $$\beta^d(B + b) = \beta^d(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}^d.$$

   Hinweis: Definieren Sie $\beta_b(A) := \beta^d(A + c)\ \forall A \in \mathcal{B}^d$ und zeigen Sie, dass β_b ebenfalls ein Maß auf $\mathcal{B}^d$ ist. Zeigen Sie dann, dass $\beta_b(A) = \beta^d(A + c)\ \forall A \in \mathcal{I}^d$ gilt.