

Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20

Blatt 3, Abgabe: 18.11.2019 (vor der Vorlesung)

7. (2+2 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen $\mu_i^*: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ sind äußere Maße?

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

$$\mu_2^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und beschränkt,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Aussage!

8. (1+2 Punkte)

Es seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

(i) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$!

(ii) Definieren Sie zwei Maße μ_1 und μ_2 auf $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty \forall E \in \mathcal{E}$ und $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$, aber $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$ für eine Menge $A \in \sigma(\mathcal{E})$!

9. (1 Punkt)

Die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sei so definiert:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

(F ist nicht rechtsstetig und somit keine Verteilungsfunktion!)

μ sei jener Inhalt auf $\mathcal{B}_0^1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i] : -\infty < a_i \leq b_i < \infty \right\}$ mit $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$, falls $-\infty < a \leq b < \infty$.

Zeigen Sie, dass μ **kein** Prämaß auf \mathcal{B}_0^1 ist!

(Hinweis: Nutzen Sie, dass $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n]$ gilt.)

10. (2 Punkte)

Es seien P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion, d.h.,

$$F(x_1, \dots, x_d) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_d]).$$

Zeigen Sie, dass

$$P((x_1, x_1 + y_1] \times \dots \times (x_d, x_d + y_d]) = \sum_{\theta \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{i=1}^d (1-\theta_i)} F(x_1 + \theta_1 y_1, \dots, x_d + \theta_d y_d)$$

für alle $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$, $y_1, \dots, y_d \geq 0$ gilt!