Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20

Blatt 4, Abgabe: 02.12.2019 (vor der Vorlesung)

11. (1+1 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein messbarer Raum. Welche numerischen Funktionen $f\colon\ \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sind $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar, falls

    (i) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$,

    (ii) $\mathcal{A} = 2^\Omega$

    sind?

12. (3 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ seien messbare Räume, $f\colon\ \Omega \to \Omega'$ sei eine Abbildung. $\mathcal{E}'$ sei ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}'$, d.h., $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$ und $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$.

    Zeigen Sie: Falls $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\ \forall E \in \mathcal{E}'$ gilt, so ist f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar.

    (Hinweis: Betrachten Sie das „System der guten Mengen“: $\widetilde{A} := \{A' \in \mathcal{A}'\colon\ f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$.)

13. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein messbarer Raum und $f, g\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ seien $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$-messbare Funktionen.

    Zeigen Sie, dass $\{\omega \in \Omega\colon\ f(\omega) < g(\omega)\} \in \mathcal{A}$ und $\{\omega \in \Omega\colon\ f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathcal{A}$ gelten!

14. (2 Punkte)

    Die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

    Zeigen Sie, dass f' $(\mathcal{B} - \mathcal{B})$-messbar ist!

15. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. $\Omega_0 \subseteq \Omega$ sei eine höchstens abzählbare Menge mit $\mu(\Omega \backslash \Omega_0) = 0$ und $\{\omega\} \in \mathcal{A}\ \forall \omega \in \Omega_0$.

    Zeigen Sie: Falls $f\colon\ \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar ist, so gilt

    $$\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{\omega \in \Omega_0} f(\omega)\mu(\{\omega\}).$$