**Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20**

Blatt 5, Abgabe: 16.12.2019 (vor der Vorlesung)

16. (3 Punkte)

    $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mu$ seien Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu_n(A) \nearrow \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. $f\colon\ \Omega \to [0,\infty]$ sei eine $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbare Funktion mit $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$.

    Zeigen Sie, dass $\int_\Omega f\, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\, d\mu$ gilt!

    *Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\int_\Omega f\, d\mu_n \leq \int_\Omega f\, d\mu\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt und dass, für beliebiges $\epsilon > 0$, $\int_\Omega f\, d\mu_n \geq \int_\Omega f\, d\mu + \epsilon\ \forall n \geq N_\epsilon$ und $N_\epsilon$ hinreichend groß gilt.*

17. (2+2 Punkte)

    Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ Wahrscheinlichkeitsdichten (bezüglich des Lebesgue-Maßes) und es gelte $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

    (i) $f$ sei ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Zeigen Sie, dass dann

    $$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\, d\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

    folgt!

    (*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\int_{\mathbb{R}} (f - f_n)^+\, d\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt und folgern Sie daraus die Behauptung.*)

    (ii) Es gelte $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \neq 1$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Eigenschaften

    $$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda\ <\ 1$$

    und

    $$\int_{\mathbb{R}} |f_n\ -\ f|\, d\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\ -\ \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$$

    gelten!

    (*Hinweis: Nutzen Sie zum Beweis der letzten Beziehung, dass $|f_n - f| = (f_n - f) + 2(f - f_n)^+$ gilt.*)

18. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein W-Raum und $X\colon\ \Omega \to [0,\infty]$ sei eine nichtnegative numerische Zufallsvariable.

    Zeigen Sie, dass $\int_\Omega X\, dP\ =\ \int_{\bar{\mathbb{R}}} x\, dP^X(x)$ gilt!

    *Hinweis: Approximieren Sie $x$ durch*

    $$u_n(x)\ :=\ \sum_{i=1}^{n2^n} (i-1)2^{-n}\ \mathbb{1}_{[(i-1)2^{-n}, i2^{-n})}(x)\ +\ n\ \mathbb{1}_{[n,\infty]}(x)$$

    *sowie $X(\omega)$ durch*

    $$\bar{u}_n(\omega)\ :=\ u_n(X(\omega))\ =\ \sum_{i=1}^{n2^n} (i-1)2^{-n}\ \mathbb{1}_{X^{-1}([(i-1)2^{-n}, i2^{-n}))}(\omega)\ +\ n\ \mathbb{1}_{X^{-1}([n,\infty])}(\omega).$$