Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20

Blatt 6, Abgabe: 13.01.2020 (vor der Vorlesung)

19. (4 Punkte)

    Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q = \mathcal{B}^{p+q}$ gilt!

    Hinweis: Um $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q \subseteq \mathcal{B}^{p+q}$ zu zeigen, beweisen Sie zunächst, dass $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ $\forall A \in \mathcal{B}^p$, $\forall B \in \mathcal{B}^q$ gilt.

20. (4 Punkte)

    $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ seien messbare Räume.

    Zeigen Sie, dass für beliebiges $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und beliebiges $\omega_1 \in \Omega_1$

    $$Q_{\omega_1} \;=\; \{\omega_2 \in \Omega_2\colon \quad (\omega_1, \omega_2) \in Q\} \;\in\; \mathcal{A}_2$$

    gilt!

    Hinweis: Definieren Sie zunächst das System der guten Mengen

    $$\mathcal{D} \;=\; \{Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\colon \quad Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}.$$

21. (3 Punkte)

    μ_1 und μ_2 seien endliche Maße auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $B \in \mathcal{B}$ gilt:

    $$\int_B \mu_1(\{x \in B\colon\ x < y\})\, d\mu_2(y) \;=\; \mu_1(B)\mu_2(B) \;-\; \int_B \mu_2(\{y \in B\colon\ y \le x\})\, d\mu_1(x)!$$