**Übungsaufgaben zur VL Maßtheorie, Wintersemester 2019/20**

Blatt 7, Abgabe: 27.01.2020 (vor der Vorlesung)

22. (2 Punkte)

    Auf einem beliebigen messbaren Raum $(\Omega, 2^\Omega)$ seien $P$ ein diskretes W-Maß und $\mu$ das Abzählmaß.

    Zeigen Sie (ohne Bezugnahme auf Satz 2.25 aus der VL), dass eine Funktion $f\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

    $$P(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \forall A \subseteq \Omega\ !$$

23. (4 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein beliebiger Maßraum und $\nu$ ein beliebiges endliches Maß. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (i) $\nu \ll \mu$,

    (ii) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $\mu(A) < \delta$ stets $\nu(A) < \epsilon$ folgt!

    (*Hinweis: Beweisen Sie [(i)$\Longrightarrow$(ii)] indirekt und nehmen Sie an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ existieren mit $\mu(A_n) \le 2^{-n}$ und $\nu(A_n) \ge \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie dann $\mu(\bigcap_{n=1}^\infty B_n)$ und $\nu(\bigcap_{n=1}^\infty B_n)$, wobei $B_n = \bigcup_{k\ge n} A_n$ ist.*)

24. (1+1 Punkte)

    (i) Geben Sie einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und Maße $\nu$ und $\mu$ an, sodass $\nu \ll \mu$ gilt, aber $\nu$ keine Dichte bezüglich $\mu$ besitzt!

    (ii) Geben Sie einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und Maße $\nu$ und $\mu$ an, sodass $\nu$ Dichten $f_1$ und $f_2$ bezüglich $\mu$ besitzt mit $\mu(\{\omega : f_1(\omega) \neq f_2(\omega)\}) \neq 0$!

    (Hinweis: $\mu$ darf dann weder endlich noch $\sigma$-endlich sein.)

25. (2 Punkte)

    $X\colon\ (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_X, \mathcal{A}_X)$ und $Y\colon\ (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_Y, \mathcal{A}_Y)$ seien Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $P(X \in \cdot \mid Y = \cdot)$ sei eine Version der bedingten Verteilung.

    Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind:

    (i) $X$ und $Y$ sind stochastisch unabhängig,

    (ii) für alle $C \in \mathcal{A}_X$ gilt

    $$P(X \in C \mid Y = y) = P(X \in C) \qquad P^Y\text{-fast überall!}$$