EWMS

Sommersemester 2020, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
Dr. R. Hesse

Probeklausur

Aufgabe 1 (3+4+3)**.**

a) Seien A und B zwei zufällige Ereignisse mit $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie die Ungleichung $\frac{1}{12} \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

b) Seien A und B zwei zufällige Ereignisse mit $\mathbf{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}45$ und $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}(A^c \cap B^c)$ und $\mathbf{P}((A \cap B^c) \cap (A^c \cap B))$.

c) In einer Urne befinden sich 5 blaue, 4 rote und 6 grüne Kugeln. Sie ziehen solange ohne Zurücklegen, bis Sie zwei Kugeln gleicher Farbe gezogen haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen Sie zwei blaue Kugeln?

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)**.**
In einer Bevölkerung sind durchschnittlich 1% aller Personen an Tbc erkrankt. Ein medizinischer Test zur Tbc-Erkennung zeigt bei einer vorliegenden Erkrankung in 95% aller Fälle diese an. Bei nicht an Tbc Erkrankten zeigt der Test in 4% aller Fälle aber irrtümlich eine Erkrankung an.

a) Aus der Bevölkerung wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reagiert der Test positiv?

b) Wir betrachten jetzt eine Person, die auf den Test positiv reagiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie tatsächlich Tbc?

c) Wir wollen den Test verbessern, sodass er seltener bei nicht an Tbc Erkrankten eine Erkrankung anzeigt. Wie groß darf diese ‚Falsch-Positiv'-Wahrscheinlichkeit höchstens sein, damit eine Person mit positivem Testbefund mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% auch krank ist.

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte)**.** Sei X exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \lfloor X \rfloor + 1$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}Y$.

c) Zeigen Sie für alle $\lambda > 0$

$$\frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte)**.**

a) Seien X und Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen zu den Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

b) Sei Z eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda = 10000$. Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ $\mathbf{P}(9800 \leq Z \leq 10200)$.

c) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 5 (2+2+2+4 Punkte)**.**

Die Verteilung eines zweidimensionalen Vektors (X, Y) ist durch folgende Tabelle gegeben:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$1/8$	$1/4$	$1/8$
$X = -2$	$1/12$	$1/3$	$1/12$

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und Y.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Bestimmen Sie $\mathbf{P}(X = 0 \mid Y \geq 0)$.

d) Bestimmen Sie die Verteilung von $Z = \min\{X, Y\}$ und berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Z)$.